KONSTANTIN
PRESLAVSKY
UNIVERSITY
S H U M E N

ШУМЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ
"ЕПИСКОП КОНСТАНТИН ПРЕСЛАВСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА "АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ"

МАРИЯ ВЪЛКОВА ИВАНОВА

ХАРАКТЕРИЗИРАНЕ НА РИМАНОВИ МНОГООБРАЗИЯ ЧРЕЗ ОПЕРАТОРИ НА ЯКОБИ И СТАНИЛОВ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд за присъждане
на образователната и научна степен "Доктор"
в докторска програма „Геометрия и Топология"
от професионално направление 4.5. Математика
област на висше образование
4. Природни науки, Математика и Информатика

НАУЧЕН РЪКОВОДИТЕЛ: ПРОФ. Д-Р ВЕСЕЛИН ВИДЕВ
ШУМЕН, 2014

Дисертационният труд е обсъден и предложен за защита от ШУ „Епископ Константин Преславски", Факултет по Математика и Информатика, Катедра "Алгебра и Геометрия" на 23.06.2014г.

Дисертацията съдържа 85 страници, от които 6 страници библиография и 79 страници корпус. Списък на използваната литература включва 60 източника, от които 2 на български и 58 на английски, немски и руски език.

Публичната защита на дисертационния труд ще се състои на 10.10.2014г. от .... часа в зала №..................

Материалите по защитата са на разположение в ШУ, ул. Университетска, №115, Корпус 1, кабинет 107.

СЪДЪРЖАНИЕ НА АВТОРЕФЕРАТА

I. ОБЩА ХАРАКТЕРИСТИКА НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

1. *Актуалност на темата*

Централен въпрос в съвременната диференциална геометрия на Римановите многообразия е по зададен тензор на кривина за произволно Риманово многообразие да се определи метриката на многообразието с точност до изометрия. При решаването на този въпрос в последните 20 години голям интерес предизвикват различните *оператори на кривина*, естествено свързани с Римановия тензор на кривина за дадено Риманово многообразие, които се дефинират като линейни изображения на допирателното пространство към многообразието в произволна точка от многообразието.

От началото на 1988 година редица автори работят по операторите на кривина и свързани с тях проблеми, като основа в тези изследвания е произволно гладко n-мерно Риманово (или псевдориманово) многообразие (M, g), с метрика g и тензор на кривината R, а също така и следните линейни оператори на кривина, дефинирани в тангенциалното пространство M_p в точката $p \in M$:

I. *Оператор на Якоби*:

$$R_X(u) = R(u, X, X),$$

дефиниран за произволен единичен вектор $X \in M_p$ *в произволна точка* $p \in M$.

II. *Кососиметричен оператор*:

$$\kappa_\alpha(u) = \kappa_{X,Y}(u) = R(X, Y, u),$$

дефиниран за произволен ортонормиран базис X, Y *на дадена двумерна допирателна площадка* $\alpha \in M_p$ *в точка* $p \in M$.

III. *Обобщен оператор на Якоби*:

$$R(E^m)(u) = \sum_{i=1}^{m} R(X_i, X_i, u)\,,$$

дефиниран за произволно m-мерно допирателно подпространство $E^m \subset M_p$ в *точка* $p \in M$, *където* $\{X_i\}_{i=1,m}$ $(m \leq n)$ *е ортонормиран базис за подпространството* E^m.

IV. *Оператор на Станилов*:

$$S(E^m)(u) = \sum_{i<j=1}^{m} \kappa(X_i, X_j) \circ \kappa(X_i, X_j)(u),$$

дефиниран за произволно m*-мерно подпространство* $E^m \subset M_p$ в *точка* $p \in M$, *където* $\{X_i\}_{i=1,m}$ $(m \leq n)$ *е ортонормиран базис в* E^m.

Тези оператори на кривина, с изключение на оператора на Якоби, дефиниран от Робърт Осерман [45] са дефинирани в Римановата геометрия от Грозьо Станилов.

В сила е следното [26]:

Твърдение. *Операторите на Станилов не зависят от ортогонални трансформации на ортонормираните базиси в индуциращите ги подпространства.*

По този начин операторите на Станилов, дефинирани с равенствата II - IV се индуцират от допирателни подпространства на тангенциалното пространство M_p към многообразието (M, g) в точка $p \in M$, поради което операторът дефиниран с равенство III може да се приеме за обобщение на оператора на Якоби дефиниран с равенството I, а операторът дефиниран с равенство IV може да се приеме за обобщение на кососиметричния оператор на Станилов, дефиниран с равенството II.

През 1998 година работещите по оператора на Якоби учени взеха участие с доклади на първата “*Работна среща по*

Осермановите и свързани с тях проблеми", състояла се през 16-19 юли в университета на Сантяго де Компостела (Испания). Началото на тези изследвания бе поставено от Робърт Осерман чрез следното [45]:

Предположение. *Едно Риманово многообразие* (M, g) *е локално симетрично пространство от ранг* 1 *или плоско, ако собствените стойности на оператора на Якоби* R_X *са глобални константи върху многообразието.*

Римановите многообразия, удовлетворяващи тази хипотеза са наречени от Питър Гилки, Андрю Суон и Лиевен Ванхеке [17] *глобални Осерманови многообразия.*

Глобалните Осерманови многообразия са изследвани подробно от докторанта на Осерман Куо-Шин-Чи [11], който даде положителен отговор на предположението на Осерман при размерност на многообразието $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$, $n \equiv 2 (mod\ 4)$ и $n=4$.

След предположението на Осерман, Гилки, Суон и Ванхеке поставиха следния [17]:

Въпрос. *Ако собствените стойности на оператора на Якоби* R_X *зависят само от точката* $p \in M$ *и не зависят от единичния вектор* X *от тангенциалното пространство* M_p, *то дали* M *е локално симетрично пространство от ранг* 1?

Многообразията, които удовлетворяват посоченото свойство са наречени *точково постоянни Осерманови многообразия* и бе доказано съществуването на четиримерни точково постоянни Осерманови многообразия, които не са глобално Осерманови многообразия [17].

По-късно Юри Николаевски доказа, че класът на точково постоянните Осерманови многообразия съвпада с класа на глобалните Осерманови многообразия при размерност на многообразието различна от 2, 4, 8, 16 [43].

Предположението на Осерман бе пренесено в четиримерната Лоренцова геометрия от Едуардо-Гарсия Рио, Демир Купели и Рамон Васкес-Лоренцо [13], които дефинираха точково постоянни пространственоподобни и времеподобни Осерманови Лоренцови многообразия като многообразия за които характеристичният полином на оператора на Якоби R_X е точково постоянен в произволна точка многообразието за всеки пространственоподобен или времевоподобен вектор X. Тези автори доказаха следното [13]:

Твърдение 2. *Едно четиримерно Лоренцово многообразие* (M, g) *е Осерманово Лоренцово многообразие тогава и само тогава, когато* (M, g) *е пространство с постоянна секционна кривина.*

В псевдоримановата геометрия бяха характеризирани псевдоримановите многообразия за които операторът на Якоби има Жорданова нормална форма с точково постоянен спектър във всяка точка от многообразието [26].

От началото на 1989 година редица автори започнаха да работят върху операторите на Станилов, като първо бе доказано, че четиримерните Айнщайнови Риманови многообразия, за които кососиметричният оператор на Станилов (дефиниран с равенството II) има точково постоянни собствени стойности са многообразия с постоянна секционна кривина [36].

Стефан Иванов и Ирина Петрова характеризираха четиримерните Риманови многообразия, за които кососиметричният оператор на Станилов (дефиниран с равенството II) има точково постоянни собствени стойности върху многообразието като бе доказано, че те са или пространства с постоянна секционна кривина, или изкривени произведения от реален интервал и тримерно пространство с постоянна секционна кривина [37].

Същият резултат, но при произволна размерност на многообразието бе доказан от Гилки, Лаи и Садофски, като тези многообразия бяха наречени *IP-многообразия* (Иванов-Петрова) [23].

Кососиметричният оператор на Станилов предизвика голям интерес от страна на Гилки, като под негово ръководство в

Орегонския държавен университет в периода 1998-2000 Тан Дзанг разработи и защити дисертацията: T. Zhang. *Manifolds with indefinite metrics whose skew-symmetric curvature operator has constant eigenvalu*es, Ph.D. Thesis, University of Oregon, 2000.

По-късно Гилки, Никцевич и Видев обобщиха псевдоримановите *IP*-многообразия, чрез условието оператора на Станилов (дефиниран чрез равенство IV) да има Жорданова нормална форма с точково постоянен ранг във всяка точка от многообразието, които в бяха наречени от Гилки, Никцевич и Видев *многообразия на Станилов* [16].

Обобщаването на оператора на Якоби чрез симетричния оператор III доведе до обобщаване на предположението на Осерман и въвеждане на *понятието точково постоянни и глобални Осерманови многообразия от ред k,* които бяха подробно изучени в [15], [21], [50].

Нов момент в развитието на теорията на операторите на кривина бе теорията на Станилов-Цанков-Видев, която стартира в началото на 2002 година с идеята на Станилов да бъдат изучени класовете от Риманови многообразия, за които два кривинни оператора комутират.

Първоначално бяха дефинирани и частично характеризирани четиримерните Риманови многообразия с комутиращи кососиметричен и обобщен оператор на Якоби индуцирани от една и съща допирателна площадка [52], наречени по-късно от Гилки многообразия на Станилов-Видев [26]. По-късно бяха характеризирани Римановите и псевдоримановите многообразия, за които два оператора на Якоби комутират [28], [29], [30].

Друга в тази област е статия [14], в която бе поставено условието два обобщени оператора на Якоби, дефинирани от взаимно-допълващи се ортогонални пространства да комутират във всяка точка от многообразието. Доказано бе, че това е необходимо и достатъчно условие за неразложимите четиримерни Айнщайнови Риманови многообразия. Този резултат бе обобщен от Гилки и Видев при произволна размерност на многообразието, като освен това бе доказано, че посоченото условие е необходимо и достатъчно условие за разложимите Риманови и псевдориманови многообразия, които са директни произведения на съответно Айнщайнови Риманови и псевдориманови многообразия [14].

Комутационната теория за операторите на кривина бе подробно разгледана в статията [10] и монографиите [19] и [34], като бяха изведени редица важни геометрични, алгебрични и топологични резултати.

Редица резултати по посочените и свързани с тях въпроси са получени в следните научни монографии и публикации: [1], [4], [5], [6], [7], [9], [18], [20], [22], [25], [27], [31], [32], [33], [35], [39], [41], [42], [46], [47], [51], [53], [54], [57], [58], [59], [60].

В представения дисертационен труд продължаваме изследванията върху операторите на кривина дефинирани с равенства I - IV, като характеризираме някои класове от Риманови и почти Ермитови многообразия чрез точково постоянни условия и алгебрични равенства за тези оператори, а също така извеждаме резултати за Римановите многообразия, върху които тези операторите на кривина комутират.

2. *Цели и задачи на дисертационния труд*

Поставените цели в настоящата дисертация са да бъдат продължени изследванията върху оператора на Якоби и операторите дефинирани от Станилов върху Риманови многообразия с или без допълнителни структури, както и върху хиперповърхнини в евклидовото векторно пространство $\boldsymbol{R}^{n+1}$.

За оператора на Якоби са поставени точково постоянни условия за два от неговите характеристични коефициенти ако е дефиниран върху 4-мерно Риманово многообразие, или за неговите собствени стойности, ако е дефиниран върху хиперповърхнина в евклидовото векторно пространство $\boldsymbol{R}^{n+1}$.

Разгледан е дуалния принцип (дефиниран първоначално от Ракич) свързващ ортонормирана двойка вектори, индуциращи два оператора на Якоби. Поставени са и алгебрични условия, във вид на степенни равенства за такива оператори.

За кососиметричния оператор на Станилов е поставено условие за неговите собствени стойности, ако е дефиниран върху хиперповърхнина в евклидовото векторно пространство $\boldsymbol{R}^5$.

Разгледани са четиримерни Риманови многообразия с комутиращи оператори на Станилов относно една и съща, или ортогонални двумерни площадки, както и комутиращи обобщени оператори на Якоби относно ортогонални подпространства на тангенциалното пространство към многообразието.

В този аспект задачите които решихме са:

- Характеризиране на четиримерни точково постоянни Осерманови пространства чрез два от характеристичните коефициенти на оператора на Якоби индуциран от вектор, принадлежащ на една от координатните равнини на базиса на Сингер-Торп.
- Характеризиране на хиперповърхнини с постоянна секционна кривина и локално евклидови хиперповърхнини в $\boldsymbol{R}^{n+1}$, чрез точково постоянни условия за собствените стойности на оператора на Якоби - наричаме ги точково постоянни Осерманови хиперповърхнини.
- Характеризиране на точково постоянни хиперповърхнини на Станилов в евклидовото векторно пространство $\boldsymbol{R}^5$, за които кососиметричния оператор на Станилов притежава точково постоянни собствени стойности във всяка точка от хиперповърхнината, като например IP-хиперповърхнините, хиперповърхнините с постоянна секционна кривина и обобщените параболични повърхнини.
- Характеризиране на почти Ермитови многообразия с постоянна холоморфна секционна кривина и обобщени комплексни пространствени форми чрез дуалния принцип на Ракич, и чрез степенни равенства за оператора на Якоби.

- Характеризиране на четirимерните Риманови многообразия с постоянна секционна кривина чрез комутационни равенства за оператори на Станилов относно една и съща или ортогонални двумерни площадки.
- Характеризиране на четиримерни Айнщайнови Риманови многообразия чрез комутационни равенства за обобщени оператори на Якоби, дефинирани относно ортогонални подпространства на тангенциалното пространство към многообразието.

3. *Обект на дисертационния труд*

Обект на дисертацията са Риманови многообразия с постоянна секционна кривина, точково постоянни и глобални Осерманови пространства, локално евклидови хиперповърхнини, *IP*-многообразия и хиперповърхнини, почти Ермитови многообразия с точково постоянна холоморфна секционна кривина, обобщени комплексни пространствени форми, Айнщайнови многообразия, многообразия на Станилов-Видев и др.

4. *Методология на изследването*

В представената дисертация са използвани методи на модерната диференциалната геометрия на Римановите многообразия с и без допълнителни структури, кватернионни структури и структурни модули на Клифорд, топологични методи, алгебрична топология, линейна алгебра, аналитична геометрия, реален и комплексен анализ и други.

II. СЪДЪРЖАНИЕ НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

Дисертационният труд се състои от увод, изложение в седем параграфа, заключение, декларация за оригиналност, библиография, цитати по дисертацията.

В съдържателно отношение той е структуриран по следния начин:

Увод

Изложение

- **§1.** Характеризиране на четиримерните Айнщайнови Риманови многообразия чрез характеристични коефициенти на оператора на Якоби и базиси на Сингер-Торп
- **§2.** Точково постоянни Осерманови хиперповърхнини
- **§3.** Точково постоянни хиперповърхнини на Станилов
- **§4.** Дуален принцип на Ракич в Римановата и почти Ермитовата геометрия
- **§5.** Характеризиране на Риманови многообразия чрез степенни равенства за оператора на Якоби
- **§6.** Четиримерни Риманови многообразия с комутиращи оператори на Станилов
- **§7.** Четиримерни Риманови многообразия с комутиращи обобщени оператори на Якоби относно ортогонални площадки

Заключение

Декларация за оригиналност

Библиография

Цитати по дисертацията

В **Параграф 1** усилваме точково постоянните условия наложени върху характеристичните коефициенти на оператора на Якоби [51], като изискваме тези условия да са в сила само за операторите на Якоби, индуцирани от единичните вектори принадлежащи на координатните равни образувани от базисите на Сингер-Торп във всяка точка от произволно четиримерно Айнщайново Риманово многообразие.

Нека (M, g) е четиримерно произволно Риманово многообразие. Тогава операторът на Якоби R_X има характеристично уравнение

$$c(c^3 - J_1 c^2 + J_2 c - J_3) = 0 \,,$$

в което c е корен. Ако допуснем, че характеристичният коефициент $J_1(p; X)$ на оператора на Якоби R_X е точково постоянна функция върху M, тогава (M, g) е Айнщайново Риманово многообразие. За този клас от Риманови многообразия е в сила следната:

Теорема 2. [49] *Нека* (M, g) *е четиримерно Айнщайново Риманово многообразие. Тогава във всяка точка* $p \in M$ *съществува ортонормиран базис* e_1, e_2, e_3, e_4 *за тангенциалното пространство* M_p*, относно който ненулевите компоненти на тензора на кривина* R *се задават чрез формулите*:

$$R_{1221} = R_{3443} = \lambda_1 \,,$$

$$R_{1331} = R_{2442} = \lambda_2 \,,$$

$$R_{2332} = R_{1441} = \lambda_3 \,,$$

$$R_{1234} = \mu_1 \,,\ \ R_{1342} = \mu_2 \,,\ \ R_{1423} = \mu_3 \,,$$

където $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$ *, където* $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{\tau}{4}$ *и където* τ *е скаларната кривина за* M.

Забележка.

1) *Базисът с посоченото свойство се нарича базис на Сингер-Торп*;

2) *Точково постоянните функции* λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3, *се наричат инварианти на базиса на Сингер-Торп* [8].

В параграфа доказваме следните теореми:

Теорема 4. *Нека* (M, g) *е четиримерно Айнщайново Риманово многообразие и нека характеристичният коефициент* $J_2(p; X)$ *на оператора на Якоби* R_X *е точково постоянен за всеки единичен вектор* X, *принадлежащ на една координатните равнини на базиса на Сингер-Торп за тангенциалното пространство* M_p *във всяка точка* $p \in M$. *Тогава* (M, g) *е четиримерно точково постоянно Осерманово многообразие.*

Теорема 5. *Нека* (M, g)*е четиримерно Айнщайново Риманово многообразие и нека характеристичният коефициент* $J_3(p; X) \neq 0$ *на оператора на Якоби* R_X *е точково постоянен за всеки единичен вектор* X, *принадлежащ на една от координатните равнини на базиса на Сингер-Торп за тангенциалното пространство* M_p *във всяка точка* $p \in M$. *Тогава* (M, g) *е четиримерно точково постоянно Осерманово многообразие.*

В **Параграф 2** дефинираме точково постоянни Осерманови хиперповърхнини в евклидовото векторно пространство $\boldsymbol{R}^{n+1}$, като хиперповърхнни за които операторът на Якоби има точково постоянни собствени стойности във всяка точка от хиперповърхнината.

Доказваме следната:

Теорема 1. M *е точково постоянна Осерманова хипер-повърхнина в* $\boldsymbol{R}^{n+1}$ *тогава и само тогава, когато е в сила един от следните случаи*:

1) M *е локално евклидова хиперповърхнина в* $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}}$;

2) M *е хиперповърхнина с постоянна секционна кривина* (*хиперсфера*).

В **Параграф 3** дефинираме точково постоянни хиперповърхнини на Станилов в евклидовото векторно пространство $\boldsymbol{R}^{n+1}$, като хиперповърхнини за които кососиметричния оператор на Станилов притежава точково постоянни собствени стойности във всяка точка от хиперповърхнината $M \in \boldsymbol{R}^{n+1}$.

Основна за параграфа е следната:

Теорема 4. *Една четиримерна хиперповърхнина* M, *принадлежаща на петмерното реално евклидово векторно пространство* $\boldsymbol{R}^5$ *е точково постоянна хиперповърхннина на Станилов тогава и само тогава, когато тя е един от следните типове*:

a) M *е хиперповърхнина с постоянна секционна кривина* (*хиперсфера*);

b) M *е обобщена параболична хиперповърхнина, в частност хиперповърхнина с постоянна секционна кривина равна на нула*;

c) M *е хиперповърхнина*, *която е изкривено произведение от вида* $B \times_f N$, *където* B *е отворен интервал от реалната линия,* N *е* 3-*мерно пространство с постоянна секционна кривина,* f *е гладка функция върху* B, *зададена чрез формулата*

$f(x) = \sqrt{Kx^2 + Cx + D}$, *където* K, C, D *са константи такива*, *че* $C^2 - 4KD \neq 0$.

В **Параграф 4** разглеждаме дуалния принцип на Ракич, дефиниран за оператора на Якоби R_X в Римановата и почти Ермитовата геометрия, като чрез собствените вектори на R_X и дефинирания чрез тензора на кривина на Станилов R^* [3] съответен *-оператор на Якоби $R*_X$, характеризираме обобщените комплексни пространствени форми и многообразията с точково постоянна холоморфна секционна кривина [55].

В **Параграф 5** дефинираме и характеризираме n-мерните Риманови многообразия, за които матриците на вторите степени на два оператора на Якоби, индуцирани от ортонормирана двойка вектори са равни. Тези многообразия наричаме 2-Якобиеви многообразия и доказваме, че те са пространства с постоянна секционна кривина или обобщени комплексни пространствени форми при размерност n=4.

В **Параграф 6** чрез комутационно условие за кососиметричния оператор на Станилов и обобщения оператор на Якоби от ред 2, дефинирани относно една и съща двумерна площадки характеризираме четиримерни Риманови многообразия с постоянна секционна кривина.

В **Параграф 7** с помощта на обобщения оператор на Якоби от втори ред, характеризираме класовете от четиримерни Риманови многообразия, за които всеки два обобщени оператора на Якоби, дефинирани относно ортогонални подпространства на тангенциалното пространство към многообразието, комутират във всяка точка от многообразието.

Основен резултат за параграфа е:

Теорема 1. *Нека* (M,g) *е четиримерно Риманово многообразие. Тогава следните условия са еквивалентни*:

a) *За произволно подпространство* $\alpha \in M_p$ *в произволна точка* $p \in M$*, е в сила равенството*:

$$R_\alpha \circ R_{\alpha^\perp} = R_{\alpha^\perp} \circ R_\alpha,$$

b) (M,g) *е Айнщайново Риманово многообразие.*

III. АПРОБАЦИЯ НА РЕЗУЛТАТИТЕ

Основната част от резултатите в настоящият дисертационен труд са публикувани в статиите (по години на публикуване):

1. Цанков, Ю., В. Видев, М. Стоева. *Точково постоянни хиперповърхнини на Осерман и Станилов в реално стандартно векторно пространство*. Съюз на учените, Стара Загора, (2002), том 1., 40-46.
2. Tzankov, Y., M. Stoeva. *Four-dimensional pointwise hypersurfaces of constant type*. Mathematics and Education in Mathematics (2002), 118-122.
3. Zhelev, Zh., M. Ivanova, V. Videv. *Four-dimensional Riemannian manifolds with commuting higher order Jacobi operator*. Plovdiv University "Paisii Hilendarski", Bulgaria, Mathematics, vol. 35, Book 3, (2007), 167-180.
4. Ivanova, M., V. Videv. *Four-dimensional Riemannian Stanilov-Videv manifold*. International Journal of Pure and Applied Mathematics, vol.89, № 1, (2013), 1-7.
5. Ivanova, M., V. Videv, Zh. Zhelev. *On the Rakic duality principle in the almost Hermitian geometry*. Journal of Geometry, 104, (2013), 495-504.
6. Videv, V., M. Ivanova. *Riemannian mamifolds characterized by Stanilov curvature operators*. Journal of Geometry, 105 (2014), 207-208.

Резултатите от дисертационния труд са докладвани на:

1. Конференция на Съюза на Математиците в България, 2002.

   Tzankov, Y., M. Stoeva. *Four-dimensional pointwise hypersurfaces of constant type*. Mathematics and Education in Mathematics (2002), 118-122.

2. Конференция на Съюза на Учените в България, Стара Загора, 2002.

   Цанков, Ю., В. Видев, М. Стоева. *Точково постоянни хиперповърхнини на Осерман и Станилов в реално стандартно векторно пространство*. Съюз на учените, Стара Загора, (2002), том 1., 40-46.

3. International Conference on Geometry and Applications, Druzba, Varna, 2013.

   Videv, V., M. Ivanova. *Riemannian mamifolds characterized by Stanilov curvature operators.* Journal of Geometry, 105 (2014), 207-208.

IV. СПРАВКА ЗА ПРИНОСНИ МОМЕНТИ

Получените резултати в настоящия дисертационен труд са още едно потвърждение, че изследването на Римановите многообразия чрез операторите на Якоби и Станилов е един интересен и актуален подход в съвременната диференциална геометрия, чрез който характеризираме известни, а също така дефинираме и характеризираме нови класове от Риманови многообразия.

Според нас по-важните резултати в дисертацията са следните:

- Характеризиране на четиримерните точково постоянни Осерманови многообразия чрез характеристични коефициенти на оператора на Якоби и базисите на Сингер-Торп.
- Характеризиране на хиперповърхнини с постоянна секционна кривина и локално евклидови хиперповърхнини в $\boldsymbol{R}^{n+1}$, като хиперповърхнини за които операторът на Якоби има точково постоянни собствени стойности.

- Дефиниране на точково постоянни хиперповърхнини на Станилов в $\boldsymbol{R}^5$, за които кососиметричния оператор на Станилов притежава точково постоянни собствени стойности, и характеризирането им като един от класовете:
  - хиперповърхнини с постоянна секционна кривина;
  - обобщени параболични хиперповърхнини;
  - хиперповърхнини, които са изкривени произведения от вида $B\times_f N$, където B е отворен интервал от реалната линия, N е 3-мерно пространство с постоянна секционна кривина, и f е гладка функция върху B, зададена чрез формулата $f(x) = \sqrt{Kx^2 + Cx + D}$, като K, C, D и са константи като $C^2 - 4KD \neq 0$.
- Характеризиране на почти Ермитовите многообразия с постоянна холоморфна секционна кривина и обобщени комплексни пространствени форми чрез дуалния принцип на Ракич, дефиниран за холоморфна и антихоломорфна двойка вектори.
- Характеризиране на четиримерните пространствени и обобщени комплексни пространствени форми чрез степенни равенства за операторите на Якоби, дефинирани за ортонормирана двойка вектори.
- Характеризиране на четиримерните пространства с постоянна секционна кривина чрез комутационни условия за оператора Станилов и обобщения оператор на Якоби от ред 2, дефинирани относно едни и същи или ортогонални двумерни площадки.
- Характеризиране на четиримерните Айнщайнови Риманови многообразия чрез комутационно условие за всеки два обобщени оператора на Якоби, дефинирани относно ортогонални подпространства на тангенциалното пространство към многообразието.

V. ЦИТАТИ ПО ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

Заглавие на статия:

1. Zhelev, Zh., M. Ivanova, V. Videv. *Four-dimensional Riemannian manifolds with commuting higher order Jacobi operator*. Plovdiv University "Paisii Hilendarski", (2006).

Цитирана в статиите:

1. Gilkey, P., S. Nikčević. *Pseudo-Riemannian Jacobi–Videv Manifolds*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 4, (2006), 727–738.
2. Brozos-Vazquez, M., E. Garcia-Rio, P. Gilkey, R. Castro. *Tzankov-Videv Theory for Walker manifolds of signature* (2,2). Differential geometry, (2006), 53.
3. Brozos-Vázquez, M., E García-Río, P. Gilkey, and R. Vázquez-Lorenzo. *Examples of signature* (2,2) *manifolds with commuting curvature operators*. J. Phys. A: Math. Theor. 40, (2007).
4. García-Río, E., A. Haji-Badali, M. E. Vázquez-Abal, P. Vázquez-Lorenzo. *Lorentzian 3-manifolds with commuting curvature operators*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 5, (2008), 557-572.
5. Brozos-Vazquez, M., E. Garcia-Rio, P. Gilkey, S. Nikcevic, R. Vazquez-Lorenco [книга]. *The Geometry of Walker Manifolds*, Morgan&Glaypool Publishers, (2009).

VI. БИБЛИОГРАФИЯ

1. Петров, А. З. *Пространства Эйнштейна. Государственое издателство Физико-Математической литературы*. Москва, (1961).

2. Станилов, Г. *Диференциална геометрия*. София, Наука и изкуство, (1988).

3. Станилов, Г. *Върху геометрията на Римановите и на почти Ермитовите многообразия.* Дисертация за присъждане на научната степен "Доктор на математическите науки". София, (1977).

4. Широков, П. *Симетрические конформно-евклидовы пространства.* Изв. Казанск. физ.-мат. об-ва сер. 3, (1938), 11.

5. Akivis, M. *On the real theory of four dimensional conformal structures*. J. Geom. Physics 21, (1996), 55-80.

6. Akivis, M., V. Konnov. *Local aspects in conformal structure theory*. Uspekhi Mat. Nauk 48, 1993 (1), pages 3-40 (in Russian); English transl. in Russian Math. Surveys 48, (1993), 1-35.

7. Alekseevsky, D., N. Blazic, N. Bokan, Z. Rakic. *Self-dual and pointwise Osserman spaces*. Arch. Math. (Brno), 35, (1999), 193-201.

8. Besse, A. *Geometrie Riemanniene et dimension* 4. Cedic/Fernand Nathan Paris, (1981).

9. Blazic, N., N. Bokan, Z. Rakic. *Characterization of four-dimensional Osserman pseudo-Riemannian manifols.* Balkan. J. Geom. Apl. 2, (1997), 1-12.

10. Brozos, M.-Vàzquez, B. Fiedler, E. García-Río, P.Gilkey, S. Nikćevic, G. Stanilov, Y. Tzankov, R. Vàzquez-Lorenzo, V. Videv. *Stanilov-Tsankov-Videv Theory.* Symmetry, Integralbility

and Geometry: Methods and Applications (USA), 3, (2007), 1-14.

11. Chi, Q.-Sh. *A curvature characterization of certain locally rank-one symmetric spaces*. J. Diff. Geom. 28, (1988), 187-202.

12. Ganchev, G. *Almost Hermitian manifolds similar to the complex space forms*. Comptes rendus de l, Academie bulgare des Science, 32, (1979), 1179-1182.

13. Garcia, E.-Rio, N. Demir, Kupeli, R. Vazquez-Lorenzo. *Osserman manifolds in semi-Riemannian geometry*. Springer-Verlag Berlin; Heidelber; New York, (2000).

14. Gilkey, P., V. Videv. *Jacobi-Jacobi commuting models and manifolds.* Journal of Geometry, 92, Birkhäuser Verlag Base/Switzerland, (2009), 61-68.

15. Gilkey, P., G. Stanilov, V. Videv. *Pseudo-Riemannian manifolds whose generalized Jacobi operator has a constant characteristic polynomial.* Journal of Geometry (Basel), 62, (1998), 144-153.

16. Gilkey, P., S. Nikćevic, V. Videv. *Manifolds which are Ivanov-Petrova or k-Stanilov.* Journal of Geometry, 80, (2004), 82-94.

17. Gilkey, P., A. Swann, L. Vanchecke. *Isoparametric geodesic spheres and a conjecture of Osserman concerning the Jacobi operator*. Quart. J. Math. Oxford (2), (1995).

18. Gilkey, P. *Manifolds whose odd higher order curvature operators have constant eigenvalues at the basepoint.* Journal of Geometrical Analysis, V 22, (1992), 151-156.

19. Gilkey, P. *The geometry of curvature homogeneous pseudo-Riemannian manifolds.* Imperial College Press. Series Editor: Dennis Barden, (2007).

20. Gilkey, P. *Manifolds whose curvature operator has constant eigenvalues at the basepoint.* Journal of Geometrical Analysis, 4, (1994), 155-158.

21. Gilkey, P. *Generalized Osserman Manifolds.* Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitaet Hamburg, 68, (1998), 125-127.

22. Gilkey, P. *Riemannian manifolds whose skew-symmetric curvature operator has constant eigenvalues* II. Differential geometry and applications (ed Kolar, Kowalski, Krupka, and Slovak) Publ Massaryk University Brno Czech Republic, (1999), 73-87.

23. Gilkey, P., J. Leahy, H. Sadofsky. *Riemannian manifolds whose skew-symmetric curvature tensor has constant eigenvalues*. Indiana Univ. Math, (1999).

24. Gilkey, P. *Relating algebraic properties of the curvature tensor to geometry.* Novi Sad J Math, V29, (1999), 109-119.

25. Gilkey, P., R. Ivanova. *The geometry of the skew-symmetric curvature operator in the complex setting*. Joint with R. Ivanova. Global Differential Geometry: The Mathematical Legacy of Alfred Gray Ed. M Fernández and J. Wolf, Contemporary Mathematics, vol. 288, (2001), 325-333.

26. Gilkey, P. *Geometric Properties of Natural Operators Defined by the Riemann Curvature Tensor.* Available from World Scientific.

27. Gilkey, P., M. Brozos-Vazquez, S. Nikcevic. *Jacobi-Tsankov manifolds which are not* 2*-step nilpotent*. Proceedings of the conference Contemporary Geometry and Related Topics, (2007), 63-80.

28. Gilkey, P., M. Brozos-Vazquez. *Pseudo-Riemannian manifolds with Commuting Jacobi Operators*. Rendiconti Del Circolo Matematico di Polermo, Vol 55, (2006), 163-174.

29. Gilkey, P., M. Brozos-Vazquez. *Manifolds with commuting Jacobi operators*. Journal Geometry, Volume 86, (2006), 21-30.

30. Gilkey, P., M. Brozos-Vazquez. *The global geometry of Riemannian manifolds with commuting curvature operators*. Journal Fixed Point Theory, (2007), 87-96.

31. Gilkey, P., M. Brozos-Vazquez, E. G.-Rio. *Relating the curvature tensor and the complex Jacobi operator of an almost Hermitian manifold*. Advances in Geometry. Volume 8, Issue 3, 353-365.

32. Gilkey, P., N. Blazic, S. Nikcevic, U. Simon. *Algebraic theory of affine curvature tensors*. Archivum Mathematicum, Masaryk University (Brno, Czech Republic), 42, (2006).

33. Gilkey, P., M. Brozos-Vazquez. *Complex Osserman Algebraic Curvature Tensors and Clifford Families*. Houston Journal of Mathematics, vol. 34, (2008), 677-702.

34. Brozos-Vazquez, M., S. Nikcevic. Imperial College Press (2012). Gilkey P., *Geometric realizations of curvature*. Imperial College Press, (2012).

35. Gilkey, P., S. Nikčević. *Pseudo-Riemannian Jacobi–Videv Manifolds*. Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 4, (2006), 727–738.

36. Ivanova, R., G. Stanilov. *A skew-symmetric curvature operator in Riemannian geometry*. Symposia Gaussiana, Conf. A, Eds.: Behara / Fritsch / Lintz, Berlin, New York, (1995), 391-395.

37. Ivanov, S., I. Petrova. *Riemannian manifold in which the skew-symmetric curvature operator has constant eigenvalues.* Geometriae Dedicata 70, (1998), 269-282.

38. Kassabov, O. *On the axiom of planes and the axiom of spheres in the almost Hermitian geometry.* Serdica 8, (1982), 109-114.

39. Kobayashi, S., K. Nomizu. *Foundations of differential geometry*. vol. 1. Intercsience Publish. New York-London, (1969).

40. Kobayashi, S., K. Nomizu. *Foundations of differential geometry*. vol. 2. Intercsience Publish. New York-London, (1969).

41. Kowalski, O., F. Tricerri, L. Vanhecke. *New examples of non homogenous Riemannian manifolds whose curvature tensor is that of a Riemannian symmetric space.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 311, (1990), 355-360.

42. Kowalski, O., F. Tricerri, L. Vanhecke. *Curvature homogeneous Riemannian manifolds*. J. Math. Pures appl. 71, (1992), 471-501.

43. Nikolaevsky, Y. *Osserman Conjecture in dimension* $n \neq 8,16$. Math. Annalen 331, (2005), 505-522.

44. Nikolaevsky, Y., Z. Rakic. *A note on the duality principle and Osserman condition.* Arxiv: 1204.1600 v 1 [math= DG], (2012).

45. Osserman, R. *Curvature in the eighties*. Journal Amer. Math. Monthly, vol. 97, (1990), 731-756.

46. Rakic, Z. *On duality Principle in Osserman manioflds*. Linear Algebra and its aplications. 296, (1999), 183-189.

47. Rakic, Z. *Rank* 2 *symmetric Osserman spaces*. Bull. Austral. Math. Soc. 56, (1998), 517-521.

48. Sekigawa, K., L. Vanhecke. *Volume preserving geodesic symmetries in four-dimensional* 2*-stein spaces*. Kodai. Math J., 9, (1986), 215-223.

49. Singer, I., J. Thorpe. *The curvature of four-dimensional Einstein spaces.* Global Analisys. Papers in Honour of K. Kodaira. University of Tokio press, Princeton University Press, (1969).

50. Stavrov, I. *Spectral geometry of the Riemann curvature tensor*. Ph.D. Thesis, University of Oregon, (2003).

51. Stanilov, G., V. Videv. *On Osserman conjecture by characteristically coefficients.* Algebras, Groups and Geometries (Cambridge-Massachussets), vol. 12, (1993), 157-163.

52. Stanilov, G., V. Videv *On the commuting of curvature operators.* Mathematics and Education in Mathematics, (2004), 176-179.

53. Stanilov, G. *Higher Order Skew-symmetric and Symmetric Curvature Operators.* Comptes rendus de'l Academie bulgare des Science, v. 57, No 1, (2004).

54. Sterbreti, C. *Differentiable Operators on Geometrical structures.* Ph.D. Thesis, University of Crajova, (2004).

55. Tricery, F., L. Vanchecke, *Curvature tensors on almost Hermitian manifolds.* Trans. Amer. Math. Soc. 2676, (1981), 365-398.

56. Videv, V. *A characteristic of the real space forms by a linear operator.* Plovdiv University "Paisii Hilendarski", Bulgaria, Scientific Works-Mathematics, vol. 30. Book 3, (1993).

57. Videv, V. *Characterization of a four-dimensional Riemannian manifolds by characteristic coefficients of Jacobi operator.* Mathematics and Education in Mathematics, (1999), 160-166.

58. Videv, V. *Characterization of a three- and four-dimensional Riemannian manifolds by a pointwise conditions on the three and the determinant of Jacobi operator.* Journal of Geometry (Basel), 71, (2001), 197-205.

59. Videv, V., Y. Tzankov. *Stanilov manifolds and their characterization in dimension four.* Mathematics and Education in Mathematics, (2001), 231-235.

60. Zhang, T. *Manifolds with indefinite metrics whose skew-symmetric curvature operator has constant eigenvalues.* Ph.D. Thesis, University of Oregon, (2000).

Благодарности

Изказвам своята дълбока благодарност на проф. дмн Грозьо Станилов и проф. д-р Веселин Видев за съвместната ми и ползотворна работа с тях, проведените консултации и помощ при оформяне на настоящия Дисертационен труд.