Шуменски университет„Епископ Константин Преславски"
Факултет по математика и информатика,
Катедра "Математически анализ"

Мирослав Колев Христов

Алгебри на Бурген на подалгебри на H^{∞}

АВТОРЕФЕРАТ

за присъждане на образователната и научна степен "доктор" в област на висше образование
4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика,
научна специалност Математически анализ

Научен ръководител
доц. д-р Димчо Костов Станков

гр. Шумен 2014г.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на разширено заседание накатедрения съвет на катедра „Математически анализ“ при Факултета по математика и информатика на Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“, проведено на 18 декември 2014 г.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 8 май 2015 г. от ..... часа в зала ....., Корпус ..... на Шуменския университет на открито заседание на научното жури.

Дисертационния труд съдържа 79 страници, в които: съдържание, основен текст и библиография. Броят на статиите по темата на дисертационния труд са 6.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в катедра „Математически анализ“ при Факултета по математика и информатика на Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“.

Съдържание

1. Обща характеристика на дисертационния труд

1.1. Алгебри на Бурген

Възникването и изучаването на алгебрите на Бурген се основава на така нареченото свойство на Дънфорд-Пети (D.P.P. – Dunford-Pettis property).

Определение 2.1. Ще казваме че банаховото пространство X има D.P.P., ако: винаги, когато

редицата $\{x_n\}_n \subset X$ слабо клони към нула в X и

редицата $\{\varphi_n\}_n \subset X^*$ клони слабо към нула в спрегнатото пространство

е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x_n) = 0$.

През 1953г. А. Гротендик доказва, че пространствата $C(K)$, където K е хаусдорфов компакт и $L^1(\mu)$ - пространствата притежават това свойство. За диск алгебрата $A(\bar{D})$ това е доказано от С. Кисляков и Ф. Делбан през 1977 г.

Ж. Бурген показва, през 1984 г., че банаховите алгебри H^∞ и $A(B)$, където B е единичния поликръг или единичното кълбо в $\mathbb{C}^n$ също притежават D.P.P. $([4],[5])$.

Дж. Цима и Р. Тимони (1987г.) доказват, че пространствата: $R(K)$ - затворената обвивка в $C(K)$ на рационални функции с полюси вън от K и $A(K)$ - функциите от $C(K)$, които са аналитични във вътрешността на K, където K е компакт в комплексната равнина $\mathbb{C}$, имат D.P.P. $([6])$.

В $[6]$ авторите въвеждат понятието алгебра на Бурген в следния частен случай.

Нека K компактно хаусдорфово пространство, $C(K)$ е пространството от непрекъснатите комплексно-значни функции върху K и X е линейно подпространство на $C(K)$.

Определение 2.2. X_b е пространството от всички функции $f \in C(K)$, които удовлетворяват условието: ако $\{x_n\}_n$ слабо клони към нула в X, то $\operatorname{dist}(f.x_n, X) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Пространството X_b се нарича алгебра на Бурген на X в $C(K)$.

Следващата теорема е следствие от резултат на Ж. Бурген.

Теорема 2.3. $([6])$ Нека X е линейно подпространсто на $C(K)$. Ако $X_b = C(K)$, то X притежава D.P.P.

Теорема 2.4. $([6])$ Нека X е линейно подпространсто на $C(K)$. Тогава:

1) Ако $\bar{X}$ е затварянето по норма на X в $C(K)$, то $\left(\bar{X}\right)_b = X_b$.

2) X_b е затворена подалгебра на $C(K)$ и съдържа константите.

4) Ако X е алгебра то $X \subset X_b$.

5) Ако X е равномерна алгебра върху компактно множество $K \subset \mathbb{C}$, която съдържа функцията $f(z) = z$, то $X_b = C(K)$ тогава и само тогава, когато функцията $f(z) = \bar{z}$ е от X_b.

Пример 2.5. Търсим алгебрата на Бурген на диск алгебрата $A = A(T)$. Предвид, че A е равномерна алгебра върху T, то според т. 5 на теорема 2.4. трябва да докажем, че функцията $f(z) = \bar{z}$ е от A_b. Нека $\{x_n\}_n$ е редица, която слабо клони към нула в A, т.е. $\varphi(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ за всяко $\varphi \in A^*$. Тогава това ще е изпълнено и за функционала φ_0, който е значение в точката 0 . Така получаваме $x_n(0) = \varphi_0(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. За всяко n разгледаме функцията

$$y_n(z) = \frac{x_n(z) - x_n(0)}{z} \in A$$

Тогава за всяко $z \in T$ т.е. $z = e^{i\theta}$ е изпълнено :

$$\left|\overline{z}.x_n(z) - y_n(z)\right| = \left|e^{-i\theta}.x_n\left(e^{i\theta}\right) - \frac{x_n\left(e^{i\theta}\right) - x_n(0)}{e^{i\theta}}\right| = \left|x_n(0)\right|$$

и получаваме $\operatorname{dist}(\overline{z}.x_n, A) \le \left\|\overline{z}.x_n - y_n\right\| = \left|x_n(0)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.е. функцията $f(z) = \overline{z}$ принадлежи на A_b . Следователно $A_b = C(T)$.

По общо алгебра на Бурген се дефинира както следва.

Определение 2.6. Нека Y е комутативна банахова алгебра с единица и X е линейно подпространство на Y . Алгебра на Бурген X_b на X относно Y е множеството от всички $x \in Y$ такива, че:

ако $\{x_n\}_n \subset X$ слабо клони към нула, то $\operatorname{dist}(x.x_n, X) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

По точно е алгебрата на Бурген на X относно Y да се означава с $(X,Y)_b$ вместо с X_b .

Оказва се, че както в **теорема 2.4** може да се докаже следното твърдение.

Теорема 2.7. Нека Y е комутативна банахова алгебра с единица и X е линейно подпространство на Y . Тогава:

1) $(X,Y)_b$ е затворена подалгебра на Y .

2) Ако X е алгебра то $X \subset (X,Y)_b$.

Редицата $\{x_n\}_n$ слабо клони към нула в X, ако $\varphi(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ за всяко $\varphi\in X^*$, където X^* е спрегнатото пространство на X. Ще формулираме някои добре известни следствия от слабата сходимост.

Теорема 2.8. Нека X е нормирано пространство и $\{x_n\}_n\subset X$ слабо клони към x. Тогава $\{x_n\}_n$ е равномерно ограничена по норма т.е. $\|x_n\|_X\le c$ за всяко n.

Теорема 2.9. Нека K е компактно хаусдорфово пространство. Редицата $\{x_n\}_n\subset X$ слабо клони към x в $C(K)$, тогава и само тогава, когато $\{x_n\}_n$ е равномерно ограничена и $x_n(t)\to x(t)$ за всяко $t\in K$.

Следствие 2.10. Ако $\{f_n\}_n$ слабо клони към f в H^∞, то $\{f_n\}_n$ е равномерно ограничена, т.е. съществува константа c такава, че $\|f_n\|_\infty\le c$ и $\{f_n\}_n$ равномерно клони към f върху всяко компактно подмножество K на D.

Теорема 2.11. Ако $\{f_n\}_n$ е редица от аналитични функции, която равномерно клони към f върху компактните подмножества на D, то за всяко $k\in\mathbb{N}$ редицата от k- тите прозводни $\left\{f_n^{(k)}\right\}_n$ клони равномерно върху компактните подмножества на D към $f^{(k)}$.

Ще направим някои бележки, свързани с дефиницията на разстояние и условието $\operatorname{dist}(x.x_n,X)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

1. Разстоянието се дефинира, както следва:

$$\operatorname{dist}(x.x_n,X)=\inf_{p\in X}\|x.x_n-p\|_Y.$$

2. $\operatorname{dist}(x.x_n,X)=\inf_{p\in X}\|x.x_n-p\|_Y=\inf_{g\in[x,x_n]}\|g\|_Y=\|[x.x_n]\|_{Y/X}=$

$$=\|x.x_n+X\|_{Y/X},$$

където $\left[x.x_n\right]$ е класът, определен от $x.x_n$. Следователно, разстоянието $\operatorname{dist}(x.x_n, X)$ е фактор нормата на класа $x.x_n + X$ в пространството Y / X.

3. Ако съществува редица $\left\{p_n\right\}_n$ в пространството X такава, че $\|x.x_n - p_n\|_Y \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $\operatorname{dist}(x.x_n, X) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, защото са изпълнени неравенствата $\operatorname{dist}(x.x_n, X) \le \inf_{p\in X} \|x.x_n - p\|_Y \le \|x.x_n - p_n\|_Y$.

Нека $X = H^\infty$ е банаховата алгебра от ограничените аналитични функции върху отворения единичен кръг D. Съществуват поне три различни естествени пространства Y, които съдържат H^∞:

1. Разглеждаме $H^\infty = H^\infty\left(T\right)$ като подалгебра на $Y = L^\infty\left(T\right)$. В този случай Дж. Цима, С. Йенсон и К. Иейл са доказали, че

$$\left(H^\infty\left(T\right), L^\infty\left(T\right)\right)_b = H^\infty\left(T\right) + C\left(T\right) \left(\left[7\right]\right).$$

2. Използваме трансформацията на Гелфанд и разглеждаме $H^\infty = H^\infty\left(D\right)$ като подалгебра на $Y = C\left(M\left(H^\infty\right)\right)$ - непрекъснатите функции върху спектъра на H^∞. В този случай алгебрата на Бурген е описана от П. Гатич, Ш. Сън и Д. Джен $\left(\left[8\right]\right)$:

$$\left(H^\infty\left(D\right), C\left(M\right)\right)_b = H^\infty\left(D\right) + UC\left(D\right),$$

където с $UC\left(D\right)$ е означена алгебрата на всички функции, които са равномерно непрекъснати върху отворения единичен кръг D.

3. Разглеждаме $H^\infty = H^\infty\left(D\right)$ като подалгебра на $Y = L^\infty\left(D\right)$ - банаховата алгебра на измеримите по Лебег, естествено ограничени функции върху D. Дж. Цима, К. Стретоф и К. Иейл изследват в $\left[9\right]$ алгебрата на Бурген на $H^\infty\left(D\right)$ относно $L^\infty\left(D\right)$ и доказват,че:

$$\left(H^\infty\left(D\right), L^\infty\left(D\right)\right)_b = H^\infty\left(D\right) + C\left(\bar{D}\right) + V,$$

където $V = \left\{ g \in L^\infty(D) : \|g.\chi_{D \setminus rD}\|_\infty \to 0, \text{когато } r \to 1^- \right\}$.

Ще дадем дефинициите на две понятия, които често се използват в изледванията свързани с алгебрите на Бурген.

Нека ψ е произведение на Блашке, т.е. ψ е функция в H^∞ от вида:

$$\psi(z) = z^p \prod_n \left[\frac{-\overline{z}_n}{|z_n|} \frac{z - z_n}{1 - \overline{z}_n z} \right]^{p_n}, \text{ където}$$

1) $p, p_1, p_2, \ldots$ за неотрицателни цели числа;

2) z_n са различни ненулеви числа от отворения единичен кръг.

3) Произведението $\prod_n |z_n|^{p_n}$ е сходящо.

Редицата $\{z_n\}_n \subset D$ се нарича интерполационна, ако за всяка ограничена редица от комплексни числа $\{a_n\}_n$ съществува функция $f \in H^\infty$ такава, че $f(z_n) = a_n$ за всяко n.

Едно произведение на Блашке се нарича интерполационно, ако неговата редица от нули в D е интерполационна редица.

Да отбележим, че в случая на $L^\infty(D)$ няма теория, подобна на тази на Чанг-Маршал $([2])$. Според теоремата на Чанг-Маршал всяка затворена алгебра X между $H^\infty(T)$ и $L^\infty(T)$ е алгебра на Дъглас. Това означава, че тя съвпада със затворена подалгебра, породена от $H^\infty(T)$ и комплексно спрегнатите на множество B от интерполационни произведения на Блашке, т.е. $X = \left[H^\infty(T), \overline{B} \right]$ $([2])$. Линейното пространство

$$H^\infty(T) + C(T) = \left\{ f + g : f \in H^\infty(T), g \in C(T) \right\}$$

е алгебра на Дъглас и $H^\infty(T) + C(T) = \left[H^\infty(T), \overline{z} \right]$ $([2])$.

1.2 Цели на дисертационния труд

Определение 4.1. Затворена подалгебра X на H^{∞} се нарича инвариантна, ако $z.X \subset X$.

Определение 4.2. Всяка затворена подалгебра на H^{∞}, която съдържа диск алгебрата A се нарича аналитична алгебра.

Всяка аналитична алгебра е X инвариантна, защото $A \subset X$.

Определение 4.3. Една аналитичната алгебра X се нарича инвариантна относно обратната транслация, ако

$$f^{*}(z)=\frac{f(z)-f(0)}{z} \in X \text{ за всяко } f \in X .$$

Нека X е аналитична алгебра. В $[10]$ К. Нишизава е доказал, че линейното пространство $X+C$ е затворена алгебра тогава и само тогава, когато алгебрата X е инвариантна относно обратната транслация.

Сравнително малко са резултатите, свързани с алгебри на Бурген на подалгебри на H^{∞}. Ще отбележим няколко от тях.

1. В $[11]$ К. Изучи доказва, че ако X е аналитична алгебра и линейното пространство $X+C(T)$ е алгебра, то алгебрата на Бурген $\left(X, L^{\infty}(T)\right)_b$ съдържа $C(T)$ и се съдържа в $H^{\infty}(T)+C(T)$.

2. Особени точки на едно произведение на Блашке се наричат точките на сгъстяване на нулите му. Нека E е алгебрата на Дъглас (затворена алгебра между $H^{\infty}(T)$ и $L^{\infty}(T)$), която е породена от $H^{\infty}(T)$ и комплексно спрегнатите на всички произведения на Блашке, които имат краен брой особени точки. Означаваме с U_E множеството на вътрешните функции, които са обратими в E и с $C_E=\left[U_E, \bar{U}_E\right]$, самоспрегнатата алгебра, породена от U_E. Тогава $H^{\infty}(D) \cap C_E$ е

аналитична алгебра. За нея Дж. Цима и Р. Мортини са доказали в $[12]$, че $\left(H^\infty(D)\cap C_E, H^\infty(D)\right)_b = \left(A(\bar{D}), H^\infty(D)\right)_b$.

Както се вижда от дефиницията на произведение на Блашке, всяко крайно произведение ψ принадлежи на диск алгебрата, като $|\psi(z)|=1$ за всяко $z\in T$.

В дисертацията се изучават алгебрите на Бурген на някои инвариантни подалгебри на H^∞, които не съдържат диск алгебрата A. Те се получават от тези класически алгебри или от алгебри, инвариантни относно обратната транслация чрез умножение с ψ.

В доказателствата на основните твърдения в дисертацията са използвани идеи и резултати от $[8]$, $[9]$, $[12]$ и $[13]$.

1.3 Структура на дисертационния труд

Дисертационният труд се състои от 79 станици и съдържа:

Въведение.

Глава 1. Алгебри на Бурген на подалгебри на $H^\infty(T)$, които са инвариантни или инвариантни относно обратната транслация.

Глава 2. Алгебри на Бурген на $\psi H^\infty+\mathbb{C}$ върху единичната окръжност и спектъра на H^∞.

Глава 3. Алгебри на Бурген на $\psi H^\infty(D)$ и $\psi A(\bar{D})$ върху отворения единичен кръг *D*.

Библиография.

1.4 Актуалност на темата

Описанието на алгебрите на Бурген на H^{∞} и на диск алгебрата A спрямо обичайните пространства, които ги съдържат $L^{\infty}(T)$, $L^{\infty}(D)$, $C(M)$, където M е спектърът на съответната алгебра приключва около 1995г. – 1996г. Но тази тематика е актуална и след това с изследванията на:

1. К. Изучи за алгебрите на Бурген за специални алгебри на Дъглас $[29]$ - 2000г.

2. К. Изучи и Ш. Охно за алгебрите на Бурген на пространства от хармонични функции $[30]$ - 2005г.

3. Т. Тонев и К. Иейл ($[31]$,2005г.) ; С. Григорян и Т. Тонев ($[32]$,2006г.) – за алгебри на Бурген върху големия (обобщения) кръг.

4. А. Миралес - за алгебри на Бурген в многомерния случай $[33]$ - 2008г.

Актуални са и подалгебрите, на които в дисертацията се изучават алгебрите на Бурген.

За периода от 2000г. до 2009г., алгебрата $\psi H^{\infty}(D)+\mathbb{C}$ (включително и когато ψ е крайно произведение на Блашке) е изучавана от различни автори. Намерено е небходимо и достатъчно условие за разрешимост на крайната интерполационна задача $([22])$ и е решен проблема за короната (отвореният единичен кръг е гъсто множество в спектъра на $\psi H^{\infty}(D)+\mathbb{C}$)$([23])$.

През 2004г. К. Изучи и Д. Суарес $([34])$ изследват затворените инвариантни подпространства на H^{∞} и L^{∞}. Ако X е максимално инвариантно подпространство на H^{∞}, b е крайно произведение на

Блашке те доказват, че или $X = \frac{\omega - z}{1-\bar{\omega}z}.H^{\infty}$ за някое $\omega \in D$ или $X \cap bH^{\infty} = bX$.

1.5 Апробация на резултатите

Работите на автора по дисертацията са 6 на брой:

[14] D. Stankov, M. Hristov, Bourgain algebras of some invariant subalgebras of H^{∞}, Proceedings of the international conference MATTEX 2012, v.1, 79-84.

[24] D. Stankov, M. Hristov, Bourgain algesbras of the algebra $\psi H^{\infty} + \mathbb{C}$ on the unit circle and on the spectrum $M(H^{\infty})$, Comptes rendus de l' Academie bulgare des Sciences, (2013), vol. 66, 9, 1223-1230 .

[16] M. Hristov, On Bourgain algebras of backward shift invariant algebras and their subalgebras, Comptes rendus de l`Academie bulgare des Sciences, 67, 4, 2014, 449-458.

[25] M. Hristov, A class of functions with vanishing oscillation near the boundary of the unit disk, Annual of Konstantin Preslavski, Faculty of mathematics and informatics, Shumen 2014, vol XVI C,.109-116

[26] M. Hristov, Bourgain algebras of subalgebras of $H^{\infty}\left(D\right)$ on the unit disk, presented in Comptes rendus de l`Academie bulgare des Sciences.

[28] M. Hristov, Bourgain algebras of some subalgebras of subalgebras of the disk algebra, Mathematics and Education in Mathematics, Proceedings of the Proceedings of the Forty Four Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, (to appear).

2. Съдържание на дисертационния труд

2.1. Въведение

Състои се от четири параграфа и има встъпителен характер.

В параграф 1. са включени основни понатия и твърдения от теорията на банаховите алгебри, като например: пространство от максималните идеали (спектър), слаба*-топология, трансформация на Гелфанд, граница на Шилов и други. Припомнят се и основни характеристики на класическите пространства H^∞ и диск алгебрата A.

Параграф 2. е посветен на възникването на алгебрите на Бурген и на някои най-важни техни свойства. Посочени са и различните подходи при изучаването на бургеновите алгебри на някои класически пространства.

Параграф 3. съдържа необходимите факти за безкрайните произведения на Блашке и интерполационните редици в отворения единичен кръг.

Получените в дисертацията резултати са описани накратко в параграф 4.

2.2. Глава 1. Алгебри на Бурген на подалгебри на $H^\infty(T)$, които са инвариантни или инвариантни относно обратната транслация

В тази глава се разглеждат алгебри на Бурген на подалгебри на $H^\infty(T)$ върху единичната окръжност T.

В парграф 1.1. се излагат някои факти за алгебрата на Бурген на $H^\infty(T)$ относно $L^\infty(T)$. Известно е, че алгебрата на Бурген на $H^\infty(T)$, относно $L^\infty(T)$ съвпада с алгебра на Сарасон $H^\infty(T)+C(T)$, т.е. $\left(H^\infty(T),L^\infty(T)\right)_b = H^\infty(T)+C(T)$.

Първото доказателство на този факт принадлежи на Дж. Цима, С. Йенсон и К. Иейл.

Теорема 1.1.1 $([7])$. Нека $f\in L^\infty(T)$. Тогава следните условия са еквивалентни:

1. Ако $\{f_n\}_n$ слабо клони към нула в алгебрата $H^\infty(T)$, то $\operatorname{dist}\left(f.f_n,H^\infty(T)\right)\to 0$.

2. $f\in H^\infty(T)+C(T)$.

П. Горкин, К. Изучи и Р. Мортини $([13])$ предлагат друго доказателство, което използва теоремата на Чанг – Маршал, описваща затворените алгебри между $H^\infty(T)$ и $L^\infty(T)$.

И в двата случая основна роля има следното твърдение.

Лема 1.1.2 $([7])$. Нека редицата от функции $\{f_n\}_n$ в H^∞ е такава, че $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(z)\right|\le M$ за всяко $z\in D$. Тогава $\{f_n\}_n$ слабо клони към нула в H^∞.

В параграф 1.2. се описват алгебрите на Бурген, относно $L^\infty(T)$ на инвариантни подалгебри на $H^\infty(T)$ от вида $\psi H^\infty(T)$, където ψ е крайно произведение на Блашке. Доказано е, че $\left(\psi H^\infty(T),L^\infty(T)\right)_b$ съвпада с алгебрата на Сарасон $H^\infty(T)+C(T)$.

Теорема 1.2.2 $([13])$. Алгебрата на Бурген на $\psi H^\infty(T)$ относно $L^\infty(T)$ съвпада с алгебрата на Бурген на $H^\infty(T)$ относно $L^\infty(T)$, т.е.

$$\left(\psi H^\infty(T),L^\infty(T)\right)_b = H^\infty(T)+C(T).$$

Аналитичните подалгебри на $H^\infty(T)$ са затворените алгебри X между диск алгебрата $A(T)$ и $H^\infty(T)$. К. Изучи е доказал, че техните алгебри на Бурген съдържат непрекъснатите функции върху единичната окръжност T $([11])$.

В параграф 1.3. е дадено друго доказателство на този факт в случая, когато X е алгебра, която е инвариантна относно обратната транслация.

Теорема 1.3.3 $([16])$. Ако алгебрата X е инвариантна относно обратната транслация, то алгебрата на Бурген на $z^p X$ относно $L^\infty(T)$ съдържа $X+C(T)$ за всяко $p=0,1,2,\ldots$, т.е.

$$\left(z^p X, L^\infty(T)\right)_b \supset X+C(T).$$

Показано е също така, че това е вярно и за някои подалгебри на $H^\infty(T)$, които не съдържат диск алгебрата.

Теорема 1.3.7 $([16])$. Ако X е инвариантна относно обратната транслация алгебра и ψ е крайно произведение на Блашке, то алгебрата на Бурген на ψX относно $L^\infty(T)$ съдържа $X+C(T)$ т.е.

$$\left(\psi X, L^\infty(T)\right)_b \supset X+C(T).$$

2.3. Глава 2. Алгебри на Бурген на $\psi H^\infty(D)+\mathbb{C}$ върху единичната окръжност и спектъра на H^∞

В тази глава се разглеждат подалгебри на H^∞ от вида $\psi H^\infty+\mathbb{C}$, където ψ е произведение на Блашке и $\mathbb{C}$ е полето на комплексните константи.

В параграфи 2.1. и 2.2. се дефинират тази алгебра и се въвежда понятието нормално нулева алгебра.

Една редица $\{f_n\}_n$ в $L^\infty(D)$ се нарича нормално нулева, ако тя е равномерно ограничена в D и клони равномерно към нула върху компакнтите подмножества на D $[9]$.

Всяка редица, която слабо клони към нула в $H^\infty(D)$ е нормално нулева, но обратното не е вярно.

Нека $Y \subset L^\infty(D)$ е комутативна банахова алгебра и X е подалгебра на Y.

Нормално нулевата алгебра $X_N = (X,Y)_N$ на X относно Y се дефинира като множеството от всички $f \in Y$ такива, че:

ако $\{f_n\}_n$ е нормално нулева в X, тогава $\operatorname{dist}(f.f_n, X) \to 0$ $[9]$.

Както в $[6]$ се доказва, че $(X,Y)_N$ е затворена подалгебра на Y и $X \subset (X,Y)_N$. Ако $X \subset H^\infty$ то $(X,Y)_N \subset (X,Y)_b$, защото всяка редица, която слабо клони към нула в X е нормално нулева в X.

В този параграф е доказано, че $\left(\psi X, L^\infty(D)\right)_N \supset X + C(\bar{D})$, където X е подалгебра на $H^\infty(D)$, която е инвариантна относно обратната транслация и ψ е крайно произведение на Блашке.

В параграф 2.3. се изучава алгебрата на Бурген на $\psi H^\infty(T) + \mathbb{C}$ относно $L^\infty(T)$ и е показано, че и тя съвпада с алгебрата на Сарасон $H^\infty(T) + C(T)$.

Теорема 2.3.1. $([24])$ Ако ψ е крайно произведение на Блашке, то алгебрата на Бурген на $\psi H^\infty(T) + \mathbb{C}$ относно $L^\infty(T)$ съвпада с алгебрата на Бурген на $H^\infty(T)$ относно $L^\infty(T)$, т.е.

$$\left(\psi H^\infty(T) + \mathbb{C}, L^\infty(T)\right)_b = \left(H^\infty(T), L^\infty(T)\right)_b = H^\infty(T) + C(T).$$

Чрез трансформацията на Гелфанд $\psi H^\infty(D)+\mathbb{C}$ може да се разглежда като подалгебра на множеството $C\left(M\left(H^\infty\right)\right)$ от всички непрекъснатите функции върху спектъра на H^∞. В параграф 2.4. се описват алгебрите на Бурген на $\psi H^\infty(D)+\mathbb{C}$, относно $C\left(M\left(H^\infty\right)\right)$ и $H^\infty(D)$.

Теорема 2.4.2. $([24])$ Ако ψ е крайно произведение на Блашке, то алгебрата на Бурген на $\psi H^\infty(D)+\mathbb{C}$ относно $C(M)$ съвпада с $H^\infty(D)+UC(D)$, т.е.

$$\left(\psi H^\infty(D)+\mathbb{C},C(M)\right)_b = H^\infty(D)+UC(D).$$

Следствие 2.4.3. $([24])$ Ако ψ е крайно произведение на Блашке, то

1) $\left(\psi H^\infty(T)+\mathbb{C},H^\infty(T)\right)_b = H^\infty(T)$.

2) $\left(\psi H^\infty(D)+\mathbb{C},H^\infty(D)\right)_b = H^\infty(D)$.

2.4. Глава 3. Алгебри на Бурген на $\psi H^\infty(D)$ и $\psi A(\bar{D})$ върху отворения единичен кръг D

В тази глава се изследват инвариантни подалгебри на $H^\infty(D)$ от вида $\psi H^\infty(D)$ и $\psi A(\bar{D})$ където ψ е крайно произведение на Блашке.

В параграф 3.1. се показва, че функциите от $\left(\psi H^\infty(D),L^\infty(D)\right)_b$ са с изчезваща осцилация близко до границата на единичния кръг.

Теорема 3.1.2. $([25])$ Нека ψ е крайно произведение на Блашке и $\left(\psi H^{\infty}(D), L^{\infty}(D)\right)_b$ е алгебрата на Бурген на $\psi H^{\infty}(D)$ относно $L^{\infty}(D)$. Ако $f \in \left(\psi H^{\infty}(D), L^{\infty}(D)\right)_b$, то

$$\omega(f,z) \to 0, \text{ когато } |z| \to 1^{-},$$

т.е. f е функция с изчезваща осцилация близко до границата на единичния кръг.

Алгебрата на Бурген на $\psi H^{\infty}(D)$ относно $L^{\infty}(D)$ е описана в параграф 3.2. Доказано е също че функциите от тази алгебра имат нетангенциални граници почти навсякъде върху единичната окръжност T.

Теорема 3.2.4. $([26])$ Ако ψ е крайно произведение на Блашке, то

$$\left(\psi H^{\infty}(D), L^{\infty}(D)\right)_b = H^{\infty}(D) + C(\bar{D}) + V.$$

Последният параграф е посветен на алгебрите на Бурген $\psi A(\bar{D})$ относно $L^{\infty}(D)$ и $H^{\infty}(D)$. В параграф 3.3. е доказано, че $\left(\psi A(\bar{D}), H^{\infty}(D)\right)_b$ е породена от множеството B на произведенията на Блашке, които имат краен брой особени точки.

Теорема 3.3.3 $([28])$ Ако ψ е крайно произведение на Блашке, то

$$\left(\psi.A(\bar{D}), H^{\infty}(D)\right)_b = B.$$

Да отбележим, че в случая когато ψ е безкрайно произведение на Блашке, но с краен брой особени точки може да се докаже включването $\left(\psi.A(\bar{D}), H^{\infty}(D)\right)_b \subset B$.

3. Авторска справка за приноси в дисертационния труд

1. Известни са общи резултати за свойствата на алгебрите на Бурген на алгебри между диск алгебрата и H^∞. В дисертацията си изучават алгебри на Бурген на инвариантни подалгебри на H^∞, които **не съдържат** диск алгебрата.

2. Описани са алгебрите на Бурген на конкретни подалгебри на H^∞(**Теорема 1.2.2, Теорема 1.2.4, Теорема 2.3.1, Теорема 2.4.2, Теорема 3.2.4**).

3. В случая, когато X е подалгебра на H^∞, която е инвариантна относно обратната транслация е приведено ново доказателство на факта, че алгебрата на Бурген $\left(X, L^\infty(T)\right)_b$ съдържа $C(T)$ (**Теорема 1.3.3**).

4. Когато ψ е безкрайно произведение на Блашке с краен брой особени точки върху T е доказано, че алгебрата на Бурген $\left(\psi A, H^\infty(D)\right)_b$ се съдържа в алгебрата породена от всички произведения на Блашке с това свойство (**Теорема 3.3.3**).

4. Библиография

[1] T. Gamelin, Uniform Algebras, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J. (1969).

[2] J. Garnett, Bounded analytic functions, Springer, Graduate Texts in Mathematics 236, New York, 2007.

[3] K. Hoffman, Banach spaces or analytic functions. Prenrice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

[4] J. Bourgain, New Banach space properties of the disc algebra and H^∞, Acta Math. 152, 1984, 1-48.

[5] J. Bourgain, The Dunfod-Pettis ptoperty for the ball-algebras the polydisc- algebras and the Sobolev spaces, Studia Math. 77, 1984, 245-253.

[6] J. Cima, R. Timoney, The Dunford-Pettis property for certain planar uniform algebras, Michigan Math. J., 34 (1987), 99-104.

[7] J. Cima, Sv. Janson, K. Yale, Completely continuous Hankel operators on H^∞ and Bourgain algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 105 (1989), 121-125.

[8] P. Ghatage, S. Sun, D. Zheng, A remark on Bourgain algebras of the disk, Proc. Amer. Math. Soc., 1992, 114, 395-398.

[9] J. Cima, K. Stroethoff, K. Yale, Bourgain algebras on the unit disk, Pacific J. Math., 1993, 160, 27-41.

[10] K. Nishizawa, On closed subalgebras between A and H^∞ II, Tokyo J. Math., 5 (1982), 157-169.

[11] K. Izuchi, Bourgain algebras of the disk, polydisk and ball algebras, Duke Math. J., 66 (3), (1992), 503-519.

[12] J. Cima, R. Mortini, Bourgain algebras of the disk algebra $A(D)$ and the algebra QA, Studia Math., 113 (3), (1995), 211-221.

[13] P. Gorkin, K. Izuchi, R. Mortini, Bourgain algebras of Douglas algebras, Can. J. Math., 44 (4), (1992), 797-804.

[14] D. Stankov, M. Hristov, Bourgain algebras of some invariant subalgebras of H^∞, Proceedings of the international conference MATTEX 2012, v.1, 79-84.

[15] D. Sarason, Algebras of functions on the unit circle. Bull. Amer. Math. Soc., 79 (1973), 286-299.

[16] M. Hristov, On Bourgain algebras of backward shift invariant algebras and their subalgebras, Comptes rendus de l`Academie bulgare des Sciences, 67, 4, 2014, 449-458.

[17] T. Nakazi, Algebras generated by z and an inner function, Arch. Math., 42 , (1984), 545-548.

[18] K. Izuchi, Y. Izuchi, Algebras of bounded analytic functions containing the disk algebra, Can. J. Math., 38 (1), (1986), 87-108.

[19] T. Tonev, K. Yale, Hankel type operators, Bourgain algebras and isometries, 413-418, Recent development in operator theory and its applications (Winnipeg, MB,1994), edited by I. Gohberg et al., Oper. Theory Adv. Appl. 87, Birkhauser, Basel, 1996.

[20] M. Raghupathi, A distance formula for $BH^\infty(D)+\mathbb{C}$ and interpolation.Integral Equations Operator Theory, 63, 2009, No 1, 103–125.

[21] J. Solazzo, Interpolation and Computability, PhD Thesis, University of Houston, 2000.

[22] K. Davidson, V. Paulsen, M. Raghupathi, D. Singh. A constrained Nevanlinna-Pick theorem.Indiana Univ. Math. J., 58, 2009, 709–732.

[23] R. Mortini, A. Sasane, B. Wick. The corona theorem and stable rank for the algebra $BH^\infty(D)+\mathbb{C}$, Houston J. Math., 36, 2010, No 1, 289–302.

[24] D. Stankov, M. Hristov, Bourgain algesbras of the algebra $\psi H^{\infty}+\mathbb{C}$ on the unit circle and on the spectrum $M\left(H^{\infty}\right)$, Comptes rendus de l' Academie bulgare des Sciences, (2013), vol. 66, 9, 1223-1230 .

[25] M. Hristov, A class of functions with vanishing oscillation near the boundary of the unit disk, Annual of Konstantin Preslavski, Faculty of mathematics and informatics, Shumen 2014, vol XVI C,.109-116

[26] M. Hristov, Bourgain algebras of subalgebras of $H^{\infty}\left(D\right)$ on the unit disk, presented in Comptes rendus de l`Academie bulgare des Sciences.

[27] J. Cima, K. Stroethoff, K. Yale, The Bourgain algebra on the disk algebra, Proc. R. Ir. Acad., v. 94A, 1, 19-23, 1994.

[28] M. Hristov, Bourgain algebras of some subalgebras of the disk algebra, Mathematics and Education in Mathematics, Proceedings of the Forty Four Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, (to appear).

[29] K. Izuchi, Douglas algebras which admit codimension 1 linear isometries, Proceedings of American Math. Society v.129,7, 2069–2074, 2000.

[30] K. Izuchi, S. Ohno, Hankel-type operators on the space of bounded harmonic functions, Proceedings of American Math. Society v.134, (5), 1359 –1364, 2005.

[31] T. Tonev, K. Yale Bourgain algebras of G-disc algebras, Banach Center Publication, Warsaw, v. 67 (2005), 363-368.

[32] S. Grigoryan, T. Tonev, Shift-invariant uniform algebras on groups, N.Y. – Basel: Birkhauser, 2006.

[33] A. Mirales, Un. de Valencia, Tesis Doctoral, 2008.

[34] K. Izuchi, D. Suarez, Norm closed invariant subspaces in H^{∞} and L^{∞}, Glasgow Math. J. 46 (2004), 399–404.

[35] S. Chang, D. Marshall, Some algebras of bounded analytic functions containing the disc algebra, Lecture Notes Math. № 604, 1977, 12-20.

[36] D. Stankov, Bourgain algesbras of closed subalgebras between A and H^{∞}, Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, v. 67,1, 2014, 5-12.