РЕЦЕНЗИЯ

на дисертационен труд
за придобиване на образователна и научна степен "доктор",
в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление 4.5 Математика (Математически анализ),
докторска програма "Математически анализ"

АВТОР: Мирослав Колев Христов
ТЕМА: „Алгебри на Бурген на подалгебри на H^∞"
НАУЧЕН РЪКОВОДИТЕЛ: доц. д-р Димчо Костов Станков

РЕЦЕНЗЕНТ: доц. д-р Галина Славчева Борисова, катедра Математически анализ, ФМИ, ШУ „Еп. Константин Преславски":

- определена за член на научното жури за публична защита на дисертационен труд на тема „Алгебри на Бурген на подалгебри на H^∞" с автор Мирослав Христов за придобиване на образователната и научна степен „доктор" със заповед № РД 16-001/14.01.2015 на Ректора на Шуменски университет „Епископ Константин Преславски";
- определена за рецензент на дисертационния труд за придобиване на образователната и научна степен „доктор" с Протокол №1 от 27.01.2015 г. от първото заседание на научното жури.

Комплектът от представените от дисертанта Мирослав Христов документи за конкурса е пълен и е в съответствие с Правилника за развитие на академичния състав на ШУ.

1. **Данни за дисертанта.**

Мирослав Христов е завършил ШУ „Епископ Константин Преславски" през 1997 г. като магистър по математика. От 1998 г. е асистент в катедра Математически анализ, ФМИ, ШУ „Еп. Константин Преславски", а от 2011 г. е главен асистент. Бил е задочен докторант към катедра Математически анализ на ФМИ на ШУ, като през 2007г. е отчислен с право на защита. Научните интереси на гл. ас. Мирослав Христов са в областта на банаховите алгебри и алгебри на Бурген.

2. Актуалност на темата на дисертацията.

Настоящата дисертация е посветена на алгебри на Бурген на подалгебри на алгебрата H^∞ на ограничените аналитични функции. Възникването и изучаването на алгебри на Бурген произтича от проблеми, свързани с изучаване на оператори S_g от типа на Hankel. Например, ако $H^\infty(D)$ е алгебрата на ограничените аналитични функции в отворения единичен кръг D в комплексната равнина, операторите S_g са дефинирани чрез равенството $S_g(f) = gf + H^\infty(D)$, където g е ограничена функция в отворения единичен кръг D (т.е. $g \in L^\infty(D)$). Изследванията на тези оператори са свързани с определяне на функциите g, за които този оператор е компактен, слабо компактен или напълно непрекъснат.

Едно от направленията в тези изследвания е посветено на описание на банаховите пространства, които удовлетворяват свойството на Dunford-Pettis, т.е. пространства, в които всеки слабо компактен оператор е напълно непрекъснат. След N. Dunford и B. J. Pettis (1940), които за първи път въвеждат това свойство и показват, че то е изпълнено за L^1 пространствата, следват изследванията на A. Grothendieck (1953) за пространството от непрекъснати функции $C(X)$, J. Bourgain (1984) за $L^\infty(D)$, J. Cima и R. Timoney (1987). J. Cima и R. Timoney въвеждат понятието алгебра на Бурген за линейно подпространство X на пространството $C(K)$ от непрекъснати комплексно значни функции върху компактно хаусдорфово пространство K: пространството $X_b = (X, C(K))_b$ от всички функции $f \in C(K)$, удовлетворяващи условието за всяка слабо сходяща редица $\{x_n\}_n$ към 0 в X е изпълнено $dist(f.x_n, X) \to 0$, се нарича алгебра на Бурген на X относно $C(K)$.

Описанието на алгебрите на Бурген на H^∞ и на диск алгебрата A (т.е. множеството на всички функции, които са непрекъснати в затворения единичен кръг $\overline{D}$ и аналитични в отворения единичен кръг D) спрямо обичайните пространства, които ги съдържат $L^\infty(T)$, $L^\infty(D)$, $C(M)$ (където T е единичната окръжност, M е спектърът на съответната алгебра), продължава и приключва около 1996 г. Но тематиката е актуална и след това и продължава в изследванията на К. Изучи (2000) за алгебрите на Бурген за специални алгебри на Дъглас, на К. Изучи и Ш. Охно (2005) за алгебрите на Бурген на пространства от хармонични функции, на Т. Тонев и К. Иейл (2005), на С. Григорян и Т. Тонев (2006) за алгебри на Бурген върху големия кръг, на А. Миралес (2008) за алгебри на Бурген в многомерния случай.

Алгебрите от вида $\psi H^\infty(D) + C$ (C- полето на комплексните числа), разглеждани в дисертацията при ψ- крайно произведение на Блашке, също се изучават в периода 2000 г. – 2009 г. от различни учени.

Настоящата дисертация разглежда актуални проблеми в областта на алгебри на Бурген на подалгебри на алгебрата H^∞. Освен това тези проблеми са свързани с оператори от типа на Hankel, които са естествено обобщение на класическите оператори на Hankel върху равномерни алгебри. Тези оператори формират клас оператори, които играят значима роля в теория на функциите и имат приложение в различни области на математиката.

3. Обща характеристика на дисертацията и основни приноси

Дисертацията се състои от 79 страници текст, разделен на Въведение, 3 глави и цитирана литература от 36 заглавия. 6 от литературните източници са публикации на автора М. Христов, като 2 от тях са в съавторство с научния ръководител доц. д-р Димчо Станков, а 4 са самостоятелни.

Във Въведението са включени основни понятия и твърдения от теория на банаховите алгебри като спектър, слаба*- топология, трансформация на Гелфанд, граница на Шилов, основни характеристики на класическите пространства H^∞ и на диск алгебрата А. Посочени са някои най-важни свойства на алгебрите на Бурген и различните походи на изучаването на алгебрите на Бурген на някои класически пространства. Приведени са факти за произведенията на Блашке и интерполационните редици в отворения единичен кръг, които се използват по-нататък в дисертацията.

В **Глава 1** се разглеждат алгебри на Бурген на подалгебри на пространството на ограничените аналитични функции $H^\infty(T)$ върху единичната окръжност T, които са инвариантни или са инвариантни относно обратната транслация. Доказано е, че алгебрата на Бурген на $\psi H^\infty(T)$ относно пространството $L^\infty(T)$ на съществено ограничените (относно лебеговата мярка) функции върху единичната окръжност T съвпада с алгебрата на Бурген на $H^\infty(T)$ относно $L^\infty(T)$ в случаите, когато функцията ψ има вида:

- $\psi(z) = z^p$, p – естествено число;
- $\psi(z) = \left(\frac{z-c}{1-\bar{c}z}\right)^p$, където c е ненулева точка от отворения единичен кръг, а p е естествено число;
- $\psi(z)$ е крайно произведение на Блашке, т.е. $\psi(z) = z^p \prod_{n=1}^{k} \left(\frac{-\bar{z}_n}{|z_n|}\frac{z-z_n}{1-\bar{z}_n z}\right)^{p_n}$, където $p, p_1, p_2, \dots, p_k$ са неотрицателни цели числа, $z_1, z_2, \dots, z_k$ са различни ненулеви числа от отворения единичен кръг

(Теорема 1.2.1, Теорема 1.2.2, Теорема 1.2.4,). Това означава още, че алгебрата на Бурген на $\psi H^\infty(T)$ относно пространството $L^\infty(T)$ на ограничените функции върху единичната окръжност T съвпада с алгебрата на Сарасон $H^\infty(T) + \mathrm{C(T)}$ (C(T)- непрекъснатите функции върху единичната окръжност T), използвайки известния резултат, че алгебрата на Бурген на $H^\infty(T)$ относно $L^\infty(T)$ съвпада с алгебрата на Сарасон.

Разгледан е и известен факт на К. Изучи, отнасящ се до алгебрата на Бурген на подалгебри X на $H^\infty(T)$ (т.е. затворените алгебри между диск алгебрата A(T) и $H^\infty(T)$). К. Изучи е доказал, че алгебрата на Бурген $\left(X, L^\infty(T)\right)_b$ на аналитична подалгебра X на $H^\infty(T)$ относно $L^\infty(T)$ съдържа непрекъснатите функции C(T) върху единичната окръжност T. В тази глава е предложено друго доказателство на този факт в случая, когато X алгебра, инвариантна относно обратната транслация, или други подалгебри на и $H^\infty(T)$, които не съдържат диск алгебрата $A(\bar{D})$. Доказано е, че ако алгебрата X е инвариантна относно обратната транслация, то алгебрата на Бурген на $\left(\psi X, L^\infty(T)\right)_b$ на ψX относно $L^\infty(T)$ съдържа $X + \mathrm{C(T)}$, в случаите, когато ψ има вида

- $\psi(z) = z^p, p = 0,1,2, \dots;$

- $\psi(z) = \left(\frac{z-c}{1-\bar{c}z}\right)^p$, където c е ненулева точка от отворения единичен кръг, а p е естествено число;
- $\psi(z)$ е крайно произведение на Блашке

(Теорема 1.3.3, Теорема 1.3.5, Теорема 1.3.7).

Всички резултатите в Глава 1 са публикувани в статии [14], [16], първата от които е съвместна публикация на М. Христов с научния му ръководител доц. Станков, а втората е самостоятелна.

Глава 2 е посветена на подалгебри на H^∞ от вида $\psi H^\infty + C$, където ψ е произведение на Блашке, C- полето на комплексните числа.

Разгледани са нормално нулеви алгебри ψX за X- подалгебра на $H^\infty(D)$, инвариантна относно обратната транслация, и ψ- крайно произведение на Блашке. (Нормално нулева алгебра $(X,Y)_N$ на X относно Y е множеството от всички $f \in Y$ такива, че ако $\{f_n\}_n$ е нормално нулева редица в X (равномерно ограничена и равномерно клони към 0 върху компактните подмножества), то $dist(f.f_n, X) \to 0$.) Доказано е, че нормално нулевата алгебра $(\psi X, L^\infty(D))_N$ на ψX относно $L^\infty(D)$ съдържа $X + C(\overline{D})$ (Теорема 2.2.1).

В тази глава са разгледани алгебрите на Бурген на $\psi H^\infty + C$ относно $L^\infty(T)$ (ψ- крайно произведение на Блашке). Доказано е, че тези алгебри съвпадат с алгебрата на Сарасон $H^\infty(T) + \mathrm{C(T)}$ (която съвпада с алгебрата на Бурген $\left(H^\infty(T), L^\infty(T)\right)_b$) (Теорема 2.3.1).

Описани са алгебри на Бурген на подалгебри, инвариантни относно обратната транслация, спрямо $L^\infty(T)$ от ограничените функции върху върху единичната окръжност T (Теорема 2.3.4).

За крайно произведение на Блашке ψ е разгледана алгебрата на Бурген на $\psi H^\infty(D) + C$ относно $\mathrm{C(M)}$, където $\mathrm{M} = \mathrm{M}(H^\infty(D))$ е пространството на максималните идеали (спектъра) на $H^\infty(D)$. Доказано е, че тази алгебра съвпада с $H^\infty(D) + UC(D)$, където $UC(D)$ пространството на равномерно непрекъснатите функции в отворения единичен кръг D (Теорема 2.4.2).

Всички резултати в тази глава са публикувани в статиите [24], [16], като първата е съвместна публикация на М. Христов с научния му ръководител доц. Д. Станков, а втората е самостоятелна.

В **Глава 3** са изследвани инвариантни подалгебри на $H^\infty(D)$ и $\psi\, A(\overline{D})$, където ψ е крайно произведение на Блашке.

Доказано е, че ако ψ е крайно произведение на Блашке и f е функция от от алгебрата на Бурген $\left(\psi H^\infty(D), L^\infty(D)\right)_b$, то f е функция с изчезваща осцилация близо до границата на единичния кръг (Теорема 3.1.2).

Описана е алгебрата на Бурген на $\psi H^{\infty}(D)$ относно $L^{\infty}(D)$. Получени са връзки на $\left(\psi H^{\infty}(D), L^{\infty}(D)\right)_b$ с BV и $H^{\infty}(D)+A(\overline{D})+V$, където BV е множеството от всички функции f от $L^{\infty}(D)$, които имат съществена нетангенциална граница $f^*(\xi)$ в точката ξ, а V е множеството от функции на $L^{\infty}(D)$, които изчезват в близост до границата на отворения единичен кръг D (като са използвани определенията за BV и V от статия [9] на Дж. Цима и К. Стретхоф) (Теорема 3.2.2, Теорема 3.2.4).

Разгледани са алгебрите на Бурген на $\psi A(\overline{D})$ относно $L^{\infty}(D)$ и $H^{\infty}(D)$ като са получени съотношения между $\left(\psi A(\overline{D}), H^{\infty}(D)\right)_b$ и $\mathcal{A}$ в случая, когато ψ е крайно произведение на Блашке и когато ψ е безкрайно произведение на Блашке с краен брой особени точки (където $\mathcal{A}$ съвпада с алгебрата, породена от множеството от произведения на Блашке, които имат краен брой особени токи) – Теорема 3.3.3, Теорема 3.3.4.

Всички резултати в тази глава са публикувани в статиите [25], [26], [28], които са самостоятелни публикации на М. Христов.

В дисертацията са получени нови резултати по актуални проблеми в областта на алгебрите на Бурген. Дисертантът добре познава съвременното състояние на теорията на алгебрите на Бурген. В дисертацията е използван богат технически апарат от теорията на комплексния анализ и функционалния анализ, а също така идеи и конструкции на водещите специалисти в тази област. Изложението е ясно и точно. Авторът би могъл да направи еднотипна номерацията на определенията, теоремите и лемите във въведението и трите глави на дисертацията за по-лесно четене на текста при цитиране на твърденията.

4. Публикации по дисертацията

Резултатите по дисертацията са публикувани в 6 статии, 2 от които са съвместни с научния ръководител доц. Д. Станков, а 4 са самостоятелни. Три от статиите са публикувани в Доклади на БАН, 1 – в Годишника на ФМИ на ШУ, и по една в Сборник от доклади на конференция МАТТЕХ 2012 и 44-та Пролетна конференция на СМБ, 2015.

Считам, че приносът на кандидата в съвместните публикации е равностоен.

5. Автореферат

Авторефератът се състои от 24 страници. Изготвен е според изискванията на Правилника за прилагане на Закона за развитие на академичния състав в Шуменския университет. Авторефератът и авторската справка отразяват точно приносите в дисертационния труд.

6. Критични бележки

Критични бележки по съдържанието на дисертацията нямам.

7. Препоръки

Считам, че получените резултати в дисертацията са в а актуална и значима област на комплексния анализ – алгебрите на Бурген. Тези резултати са основа за по-нататъшни изследвания. Препоръчвам на дисертанта Мирослав Христов да продължи активно изследванията.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основание на гореизложеното считам, че предложеният дисертационен труд удовлетворява изискванията на Закона за развитие на академичния състав в Република България, на Правилника за неговото прилагане, а също така и на Правилника за прилагане на ЗРАС в Шуменския университет и на Специфичните критерии на Факултета по математика и информатика. Всичко посочено до тук ми дава основание да дам ПОЛОЖИТЕЛНА оценка на предложения дисертационен труд и предлагам на уважаемото Научно жури да присъди образователната и научна степен "доктор" на гл.ас. Мирослав Колев Христов в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика (Математически анализ).

30.03.2015 г.

Шумен

доц. д-р Галина Борисова