ШУМЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ
“ЕПИСКОП КОНСТАНТИН ПРЕСЛАВСКИ”
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА “АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ”

ВЕСЕЛИН ТОТЕВ ВИДЕВ

ХАРАКТЕРИЗИРАНЕ НА РИМАНОВИ И ПСЕВДО-РИМАНОВИ МНОГООБРАЗИЯ И МОДЕЛИ ЧРЕЗ ОПЕРАТОРИ НА КРИВИНАТА

АВТОРЕФЕРАТ

НА ДИСЕРТАЦИОНЕН ТРУД
ЗА ПОЛУЧАВАНЕ НА НАУЧНАТА СТЕПЕН
“ДОКТОР НА НАУКИТЕ”

Научна област 4-“Природни науки, математика и информатика” ;
Научно направление 4.5-“Математика ” ;
Научна специалност “Геометрия и топология” .

ШУМЕН 2014

Заглавие: Характеризиране на Риманови и псевдо-Риманови многообразия и модели чрез оператори на кривината

Автор: Веселин Тотев Видев

Адрес: Тракийски Университет-град Стара Загора
Стопански Факултет, кат. “Информатика и Математика”

е-мейл: videv@uni-sz.bg

I. ОБЩА ХАРАКТЕРИСТИКА НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

Актуалност на темата

Фундаментален въпрос в съвременната диференциална геометрия на многообразията е въпросът по зададен тензор на кривина да се определи метриката на многообразието с точност до изометрия, като чрез този тензор многообразията се характеризират *алгебрично, геометрично и топологично*. В общия случай този въпрос няма задоволителен отговор в световната литература досега, поради което е важно да се класифицират и опишат с точност до изометрия Римановите многообразия със специални нетривилни тензори на кривина [6]-[9], [12]-[80], [83]-[89], [92]-[107]. При решаването на този въпрос в последните 25 години се използват различни *оператори на кривина*, естествено свързани с тензора на кривина R за произволно Риманово(псевдо-Риманово) многообразие $M:=(M,g)$, с метрика g [12]-[24], [26]-[28], [32]-[36], [39]-[41], [43]-[79], [85]-[107]. Ако M_p е тангенциалното пространство към M, в произволна точка $p\in M$, тогава R се дефинира чрез равенството

$$R_{x,y}(z):= R(x,y,z)=\nabla_x\nabla_y z- \nabla_y\nabla_x z- \nabla_{[x,y]} z \quad ,$$

където ∇ е свързаността на Леви-Чивита, като R удовлетворява следните свойства[2]:

$$R(x,y,z,u)=- R(y,x,z,u),\ \ R(x,y,z,u)=R(z,u, x,y) ,$$

$$R(x,y,z,u)+ R(y,z,x,u)+R(z,x,y,u)=0 ,$$

второто от които се нарича *първо тъждество на Бианки*[2]. Ако g е неизродена билинейна форма със сигнатура (p,q), дефинирана върху крайномерното евклидово векторно пространство V, тогава всеки тензор $R\in\oplus^4V^*$ удовлетворяващ посочените свойства се нарича *алгебричен тензор на кривина*, съответно наредената тройка (V,g,R) се нарича *алгебричен модел*. Ако е зададен само алгебричен модел, то чрез него може да се дефинира изоморфно на модела Риманово или псевдо-Риманово многообразие (M,g) такова, че моделът (V,g,R) да съвпада с модела (M_p,g_p,R_p), във всяка точка $p\in M$[53]. Това пък ни дава възможност да работим едновременно в геометричен и алгебричен контекст по проблемите които разглеждаме. Ако работим геометрично, освен алгебричните свойства на тензора на кривина R за многообразието (M,g) имаме и четвърто свойство на този тензор, характерно за Римановите и псевдо-Римановите многообразия, наречено още второ диференциално тъждество на Бианки, което се изразява чрез равенството[2]: $\sigma_{xyz}(\nabla_x R)(y,z,u)=0$, в което σ е циклична сума по векторите x, y, z и което от своя страна прави геометричните резулатати приоритетни. В дисертацията разглеждаме следните оператори на кривина:

I. *Оператор на Якоби*: $J(X)(u)= R(u,X,X)$ или $R_X(u)=R(u,X,X)$, дефиниран за произволен единичен вектор $X\in M_p$, в точка $p\in M$(първото означение е на П.Гилки, а второто означение на Л.Ванкехе).

II. *Кососиметричен оператор*: $\kappa(X,Y)(u)=R(X,Y,u)$, дефиниран за произволен ортонормиран базис X,Y на дадена двумерна площадка $\alpha\subset M_p$, в точка $p\in M$, накратко се означава с $\kappa_\alpha(u)$;

III. *Обобщен оператор на Якоби*: $J(E^k)(u)=\Sigma_{i=1,k}\, g(X_i, X_i)J_{X_i}(u)$, дефиниран за произволно k-мерно допирателно подпространство $E^k\subset M_p$, в точка $p\in M$, където $\{X_i\}_{i=1,k}$ *е ортонормиран базис за* E^k;

IV. *Оператор на Станилов*: $\Theta(E^k)(u)=\Sigma_{i<j=1,k}\,\kappa(X_i, X_j)\circ\kappa(X_i, X_j)(u)$, дефиниран за произволно k-мерно подпространство $E^k\subset M_p$, в точка $p\in M$, където $\{X_i\}_{i=1,k}$ е ортонормиран базис в E^k**.**

V. *Симетричен оператор*: $\lambda_{X,Y}(u)=\dfrac{1}{2}\big(R(u,X,Y)+R(u,Y,X)\big)$, дефиниран за произволна ортонормирана двойка вектори $X,Y\in M_p$, в точка $p\in M$**.**

Операторите на кривина, дефинирани с равенства II-IV, са дефинирани от Г.Станилов, като за тях е в сила следното[43]:

Твърдение. *Операторите на Станилов не зависят от ортогонални трансформации на ортонормираните базиси в индуциращите ги подпространства* **.**

От това твърдение следва, че операторите на кривина дефинирани с равенствата II-IV са индуцирани от допирателни подпространства на тангенциалното пространство M_p, към многообразието (M,g), в точка $p\in M$, поради което операторът III може да се приеме за обобщение на оператора на Якоби дефиниран с равенство I, и се нарича обобщен оператор на Якоби[60], а операторът IV може да се приеме за обобщение на кососиметричния оператор, дефиниран с равенството I, и се нарича оператор на Станилов. През 1998 година работещите по оператора на Якоби автори взеха участие с доклади на първата "*Работна среща по Осерманови и свързани с тях проблеми*", състояла се през 16-19 юли в университета в Сантяго де Компостела(Испания).

Началото на всички техни изследвания бе поставено от Р. Осерман чрез следното[87]:

Предположение. *Едно Риманово многообразие* (M,g) *е локално симетрично пространство от ранг* 1 *или плоско, ако собствените стойности на оператора на Якоби* R_X *са глобални константи върху многообразието*?

Римановите многообразия, които притежават посоченото свойство, са наречени от П.Гилки, А.Суон и Л.Ванхеке глобални Осерманови многообразия[45]. Глобалните Осерманови многообразия са изследвани подробно от докторанта на Осерман Куо-Шин-Чи, който дава положителен отговор на предположението на Осерман при размерност на многообразието $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$, $n\equiv 2(mod\ 4)$ и $n=4$[23]. След хипотезата на Осерман проблемът, който той постави бе обобщен от П.Гилки, А.Суон и Л.Ванхеке, които поставиха следния[45]:

Въпрос. *Ако собствените стойности на оператора на Якоби* R_X *зависят само от точката* $p\in M$ *и не зависят от вектора* $X\in S_pM$ (*единичната сфера в точката* p), *то дали* M *е локално симетрично пространство от ранг* 1 **?**

Многообразията притежаващи посоченото свойство са наречени от посочените автори точково постоянни Осерманови многообразия, като бе доказано съществуването на четиримерни точково постоянни Осерманови многообразия, които не са глобално Осерманови многообразия и за които операторът на Якоби има три различни помежду си собствени стойности[41]. По-късно Ю.Николаевски доказа, че класът на точково постоянните Осерманови многообразия съвпада с класа на глобалните Осерманови многообразия, при размерност на многообразието различна от 2, 4, 8, 16[85]. Предположението на Осерман бе пренесено в четиримерната Лоренцова геометрия, където бяха дефинирани пространственоподобни и времеподобни Осерманови Лоренцови многообразия, за които характеристичният полином на оператора на Якоби R_X е глобална константа върху многообразието, за всеки пространственоподобен или времеподобен допирателен вектор X, като бе доказано следното[32]:

Твърдение 2. *Едно четиримерно Лоренцово многообразие* (M,g) *е Осерманово Лоренцово многообразие тогава и само тогава когато* (M,g) *е пространство с постоянна секционна кривина.*

По-късно това твърдение бе доказано от П.Гилки, Н.Блажич, Н.Бокан при произволна размерност на многообразието[47], като този резултат бе обобщен в [67], където бяха характеризирани псевдо-Римановите многообразия и модели за които операторът на Якоби има Жорданова нормална форма с точково постоянен ранг, във всяка точка от многообразието. От началото на 1988 година редица автори започнаха да работят върху операторите на кривина дефинирани от Станилов в Римановата геометрия[95]. Най-напред Г.Станилов и Р.Иванова[78] доказаха, че четиримерните Айнщайнови многообразия за които кососиметричният оператор на Станилов(дефиниран с равенството II) има точково постоянни собствени стойности са многообразия с постоянна секционна кривина. В [79] С.Иванов и И.Петрова характеризираха четиримерните Риманови многообразия за които кососиметричният оператор на Станилов има точково постоянни собствени стойности, като бе доказано, че те са или пространства с постоянна секционна кривина или изкривени произведения от реален интервал и тримерно пространство с постоянна секционна кривина. Тези многообразия бяха наречени от П.Гилки *IP*-многообразия, като същият резултат бе доказан от П.Гилки, Дж.Лаи, Х.Садофски при произволна размерност на многообразието[52]. Кососметричният оператор предизвика голям интерес от страна на П.Гилки, който публикува редица статии в тази област, с различни съавтори, като под негово ръководство, Т.Дзанг защити докторска дисертация върху този оператор, в Орегонския държавен университет, САЩ[106]. По-късно *IP*-многобразията бяха обобщени от В.Видев и Ю.Цанков, чрез условие за точкова постоянност на собствените стойности на оператора на Станилов(дефиниран чрез равенството IV), като беше характеризиран четиримерния случай на тези многобразия[101]. След това П.Гилки, С.Никцевич, В.Видев[35] дефинираха и характеризираха псевдо-Римановите многообразия и алгебрични модели, за които оператора на Станилов притежава Жорданова нормална форма с точково постоянен ранг, и които бяха наречени многообразия и модели на Станилов. Условията за точкова постоянност на характеристичните коефиценти на обобщения оператор на Якоби, доведоха до обобщаване на предположението на Р.Осерман и въвеждане от Г.Станилов и В.Видев на понятието точково и глобално Осерманово многообразие от ред *k*[93]. Тези класове от многообразия и модели бяха характеризирани от П.Гилки, в Римановата геомтрия[54] и от П.Гилки, Г.Станилов, В.Видев в псевдо-Римановата геометрия[34]. Операторът на Якоби, дефиниран от Осерман и оператора на Станилов заеха съществено място в монографиите [16], [32], [43], [60], [76] и дисертациите [5], [92], [96], [106]. Важен момент за развитието на теорията на операторите на кривина бе идеята на Г.Станилов, да бъдат изучени класовете от Риманови многообразия за които два кривинни оператора комутират, във всяка точка от многообразието. Най-напред П.Гилки и М.Брозос-Васкес[70]-[72], характеризираха Римановите и псевдо-Римановите многообразия за които два оператора на Якоби комутират. След това Г.Станилов и В.Видев дефинираха и частично характеризираха Римановите многообразия с комутиращи кососиметричен оператор и обобщен оператор на Якоби, индуцирани от една и съща допирателна площадка[94], наречени многообразия на Станилов-Видев[43]. По-нататък В.Видев и М.Иванова[104] характеризираха 4-мерните Риманови многообразия за които всеки два обобщени оператора на Якоби, дефинирани от взаимно-допълващи се ортогонални подпространства, комутират. В [33] П.Гилки и В.Видев характеризираха псевдо-Римановите многообразия за които оператора на Ричи и оператора на Якоби комутират и които бяха наречени многообразия Якоби-Видев[77] и които в дисертацията наричаме многообразия на Якоби-Ричи. Комутационната теория на операторите на кривина бе обект на монографията [43], като от разделите:

6.6 Jacobi -Videv models and manifolds ;

6.6.1. Equivalent properties characterizing Jacobi-Videv manifolds ;

6.6.2. Decomposing Jacobi-Videv manifolds ,

се вижда приноса на автора на дисертационния труд за развитието на тази теория.

Цели и задачи на дисертационния труд.

Целта на представената дисертация е да се продължат изследванията върху операторите на кривина дефинирани от Осерман и Станилов чрез собствени вектори, спектрални инварианти и жордановата нормална форма на тези оператори като по този начин се характеризират редица класически и са получени нови класове от Риманови и псевдо-Риманови многообразия и алгебрични модели. В този аспект задачите които си поставихме са характеризиране на: Осермановите хиперповърхнини и Осермановите многообразия чрез собствените вектори на оператора на Якоби, Римановите многообразия за които операторът на Якоби е идемпотентен, Римановите и псевдо-Риманови *k*-Осерманови многообразия и модели, многообразията и моделите на Станилов, четиримерните Риманови *k*-Станилови многообразия, псевдо-Римановите *k-Станилови* многообразия, за които Жордановата нормална форма на оператора на Станилов има точково постоянен ранг. Най-важната цел в дисертацията бе комутационната теория за операторите на кривина, която привлече вниманието на редица международно утвърдени геометри, като тук повечето наименования на многообразията и моделите, които са характеризирани, и които са получени като нови геометрични и алгебрични обекти са наречени на името на създателя на тази теория Г.Станилов, а някои на автора на дисертационния труд. Чрез комутационната теория за операторите на кривина бяха получени и характеризирани косо-Станиловите многообразия и модели, Римановите и псевдо-Риманови многообразия и модели на Якоби-Ричи с произволна размерност, 0-моделите на Якоби-Ричи, неразложимите и не-Айнщайнови Риманови многообразия на Якоби-Ричи, многообразията на Станилов-Видев.

Методология на изследването

В представената дисертация са използвани методи на диференциалната геометрия на Римановите и псевдо-Римановите многообразия със и без допълнителни структури, алгебрични методи, структурни модули на Клифорд, топологични методи, линейна алгебра, аналитична геометрия, реален и комплексен анализ.

Апробация на резултатите

Резултатите от дисертационния труд са докладвани на:

1. International Conference on Geometry and applications(Chairman G.Stanilov), Varna, 2001, 2003, 2005, 2007, 2008, 2009, 2011, 2013;

2. *Arbeitstagung uber Geometry and algebra*(Chairman Prof. Wefelscheid): Humbold University Berlin-2003, University of Poznan(Bendlevo), 2005;

3. 6-*th International Workshop on complex structure and vector fields*(Editors S.Dimiev and K.Sekigava), Varna 2002;

4. *Midwest Geometry Conference in honor of Thomas P.Branson.* May 18-20, 2007, Iowa City , USA;

5. Конференции на съюза на Математиците в България: 2001, 2002, 2003, 2004, 2009 година;

6. Юбилейни научна сесия ”30 *години факултет по математика и информатик*а”, Пловдив, 2000 .

7. Конференции на съюза на учените, клон Стара Загора, 2002.

Представени са 27 научни публикации по проблема на дисертационния труд, от които 15 научни публикации са реферирани в Zentralblatt MATH, 7 научни публикации са в списания с импакт фактор/ранг, самостоятелни са 6 научни публикации, от които 1 е в списание с импакт фактор/ранг, и 3 са в реферирани научни списания. Представени са 41 цитата на научните публикации по проблемите на дисертационния труд, от които 32 цитата са в реферирани научни статии или монографии на реномирани издателства, като 26 от тези цитати са в научни статии с импакт ранг/фактор.

Благодарности

Изказвам своята дълбока благодарност на моите учители Грозьо Станилов и Питър Гилки, на моите съавтори Стана Никцевич, Едуардо-Гарсия-Рио, Мигел Брозос-Васкес, Рамон Васкес-Лоренцо, Бернд Фидлер, за съвместната ми и ползотворна работа с тях.

II. СЪДЪРЖАНИЕ НА ДИСЕРТАЦИЯТА

Дисертацията се състои от 4 параграфа, като параграф 1 се състои от 3 раздела, параграф 2 е цял, параграф 3 се състои от 2 раздела и параграф 4 се състои от от 5 раздела. Основните резултати в отделните параграфи са следните:

Параграф 1. **В раздел 1.1** от §1 извеждаме резултати за четиримерните точково постоянни Осерманови многообразия и точково постоянните Осерманови хиперповърхнини в Евклидовото векторно пространство $\boldsymbol{R}^{n+1}$, чрез условия за характеристичните коефициенти и собствените стойности на оператора на Якоби. По-важни резултати в тази част са:

Теорема 1. *Едно тримерно Риманово многообразие* (M,g) *е пространство с ненулева постоянна секционна кривина тогава и само тогава когато, във всяка точка* $p \in M$ *и за всеки единичен допирателен вектор* $X \in M_p$, *поне един от характеристичните коефициенти* $J_1(p;X)$ *или* $J_2(p;X) \neq 0$ *на оператора на Якоби* J_X *е точково постоянен .*

Теорема 2. *Едно четиримерно Риманово многобразие* (M,g) *е точково постоянно Осерманово многобразие тогава и само тогава когато, за произволен единичен вектор* $X\in M_p$, *характеристичният коефициент* $J_1(p;X)$ *и един от характеристичните коефициенти* $J_2(p;X)$ *или* $J_3(p;X)\neq 0$ *на оператора на Якоби* J_X *са точково постоянни, в произволна точка* $p\in M$.

Теорема 3. *M е точково постоянна Осерманова хиперповърхнина в* $\mathbf{R}^{n+1}$ *тогава и само тогава, когато е в сила един от следните случаи*:

1) *M е локално-евклидова хиперповърхнина в* $\mathbf{R}^{n+1}$;

2)*M е хиперповърхнина с постоянна секционна кривина*(*хиперсфера*).

В раздел 1.2 от §1 разглеждаме дуалния принцип на Ракич, дефиниран за оператора на Якоби R_X , в Римановата и почти Ермитовата геометрия. Имаме следните дефиниции:

Дефиниция 2. *Нека* (M,g,J) *е произволно* $2n$*-мерно почти Ермитово многообразие* $(n\geq 2)$. *Казваме, че* (M,g,J) *удовлетворява холоморфния дуален принцип на Ракич в дадена точка* $p\in M$, *ако за произволен единичен вектор* $X\in M_p$ *едновременно са в сила равенствата*:

$$R_X(JX)=H(p)JX \quad , \qquad R_{JX}(X)= H(p)X \quad , \tag{2}$$

в които $H(p)$ *е константа, зависеща от точката* $p\in M$.

Дефиниция 3. *Нека* (M,g,J) *е произволно* $2n$*-мерно почти Ермитово многообразие*$(n\geq 2)$. *Казваме,че* (M,g,J) *удовлетворява антихоломорфния дуален принцип на Ракич в дадена точка* $p\in M$, *ако за произволни единични вектори* $X,Y\in M_p$, *за които* $X\perp Y,JY$, *едновременно са в сила равенствата* (1) .

По-важни резултати в параграфа са следните

Теорема 4. *Едно произволно* $2n$*-мерно*$(n\geq 2)$ *почти Ермитово многообразие* (M,g,J) *удовлетворява антихоломорфния дуален принцип на Ракич във всяка точка* $p\in M$ *тогава и само тогава, когато* (M,g,J) *е* $2n$*-мерно*$(n\geq 2)$ AH_3*-многообразие с точково постоянна холоморфна секционна кривина* $\mu(p)$ *и точково постоянна антихоломорфна секционна кривина* $\nu(p)$, *във всяка точка* $p\in M$.

Теорема 7. *Едно произволно* $2n$*-мерно*$(n\geq 2)$ AH_3*-многообразие* (M,g,J) *удовлетворява холоморфния дуален принцип на Ракич във всяка точка* $p\in M$ *тогава и само тогава, когато* (M,g,J) *е* $2n$*-мерно* AH_3*-многообразие с точково постоянна холоморфна секционна кривина* $\mu(p)$, *във всяка точка* $p\in M$.

В раздел 1.3 от §1 изследваме класовете от n-мерни Риманови многообразия, за които в произволна точка $p\in M$ и за произволен единичен вектор $X\in M_p$, е в сила равенството:

(3) $$R_X \circ R_X = R_X \quad .$$

В този случай операторът на Якоби R_X се нарича *идемпотентен*, за всеки единичен допирателен вектор $X\in M_p$, във всяка точка $p\in M$. Доказваме следната:

Теорема 2. *Нека* (M,g) *е* n*-мерно Риманово многообразие с размерност* $n\neq 8,16$. *Тогава операторът на Якоби* R_X *е идемпотентен, за произволен единичен вектор* $X\in M_p$, *в произволна точка* $p\in M$, *тогава и само тогава когато е в сила един от следните случаи:*

i) (M,g) *е* n*-мерно*$(n\geq 3)$ *Риманово многообразие с постоянна секционна кривина равна на* 1;

ii) *Съществува почти комплексна структура* J *такава, че* (M,g,J) *е* $2m$*-мерно*$(m\geq 2)$ AH_3*–многообразие с тензор на кривина от вида*

(10) $$R(x,y,z)=g(y,z)x-g(x,z)y+\frac{1}{3}(g(y,Jz)Jx-g(x,Jz)Jy-2g(x,Jy)Jz))\ ;$$

iii) *Съществува почти комплексна структура* J *такава, че* (M,g,J) *е* $2m$*-мерно*$(m\geq 2)$ AH_3*–многообразие тензор на кривината от вида*:

(16) $$R(x,y,z,u)=\frac{1}{3}(2g(x,Jy)Jz+g(x,Jz)Jy-g(y,Jz)Jx)\ .$$

Параграф 2. В началото на параграфа привеждаме примери за алгебрични тензори на кривина:

Пример 1. Нека g е неизродено скаларно произведение с произволна сигнатура, дефинирано върху $\mathbf{R}^m$. Нека

(1) $$R_0(X,Y,Z)=g(Y,Z)X-g(X,Z)Y$$

е тензор от тип (1,3) дефиниран върху $\mathbf{R}^m$. Тензорът R_0 има постоянна секционна кривина 1 и е алгебричен тензор на кривина.

Пример 2. Нека

(2) $$R_K(X,Y)Z=g(Y,KZ)KX-g(X,KZ)KY-2g(X,KY)KZ$$

е тензор от тип (1,3) дефиниран върху $\mathbf{R}^m$, където K е комплексна структура върху $\mathbf{R}^m$. Тензорът на кривина R_K също така е алгебричен тензор кривина, което ще докажем по-нататък.

Нека g е неизродено скаларно произведение със сигнатура (p,q) дефинирано върху стандартното реално векторно пространство $\mathbf{R}^m$. Нека $Gr_{r,s}(g)$ е грасманиана от k-мерни площадки π за които рестрикцията на g върху π е неизродена и има сигнатура (r,s). Ако R е алгебричен тензор на кривина върху $\mathbf{R}^m$, тогава можем да дефинираме обобщен оператор на Якоби върху $Gr_{r,s}(g)$ и да изучаваме случая, когато характеристичният полином на този оператор е константа и които наричаме Риманови и псевдо-Риманови модели от ред k. Въвеждаме следните дефиниции:

Дефиниция 1. *Нека* $\{Y_i\}$ *е произволен ортонормиран базис за* k*-мерната площадка* $\pi\in Gr_{r,s}(g)$, *нека* $h_{i,j} := g(Y_i,Y_j)$ *и нека* h^{ij} *е обратната й матрица. Изображението*

$$J_R(\pi): Y \to \Sigma_{1\le i,j\le r+s}\, h^{ij} R(Y,Y_i)Y_j \quad ,$$

наричаме обобщен оператор на Якоби, и което не зависи от избрания за π *ортонормиран базис* $\{Y_1, Y_2,\dots, Y_n\}$.

Дефиниция 2. *Казваме, че* R *е алгебричен тензор на кривина, който е Осерманов от тип* (r,s), *ако характеристичният полином на* $J_R(\pi)$ *не зависи от* k*-мерната площадка* $\pi\in Gr_{r,s}(g)$.

Дефиниция 3. *Нека* (M,G) *е* m*-мерно псевдо-Риманово многообразие със сигнатура* (p,q), $m=p+q$. *Казваме, че* (M,G) *е Осерманово многообразие от тип* (r,s) *ако във всяка точка от многообразието тензорът на кривина* R *е Осерманов от тип* (r,s).

По-важни резулати в параграфа са следните:

Теорема 1. *Нека* R *е алгебричен тензор на кривина, който е Осерманов от тип* (r, s) *и нека* $k:=r+s$. *Тогава характеристичният полином на оператора на Якоби* $J_R(\pi)$ *е константа върху множеството от неизродени* k*-мерни площадки и* R *е Осерманов от тип* (p,q) *за произволни* p *и* q *със свойството* $p+q=k$.

Теорема 2. *Нека* R *е алгебричен тензор на кривина, който е Осерманов от тип* (r, s). *Тогава*

1. *Ако* X *е нулев вектор, тогава характеристичният полином на оператора на Якоби* $J_R(X)$ *има нулеви коефициенти* ;

2. *Тензорът* R *е Айнщайнов.*

Теорема 3. *Нека* R *е алгебричен тензор на кривина, който е Осерманов от тип* (r,s), *като* $2r+2s\neq m$. *Тогава тензорът* R *е двущайнов.*

Забележка. *Отбелязваме, че* R *е двущайнов тензор, тогава и само тогава когато* $trace(J_R{}^2(X))$ *е константа върху* $S^{\pm}$.

Теорема 4. *Нека* R *е алгебричен тензор на кривина. Тогава* R *е Осерманов тензор от тип* (r,s), *точно когато* R *е Осерманов тензор* от *тип* $(p\text{-}r,\ q\text{-}s)$.

Теорема 5. *Нека* (r,s) *са допустими стойности за сигнатурата на линейното пространство над което е дефиниран алгебричният тензор на кривина* R. *Тогава*

1. *Алгебричният тензор на кривина* R_0 *е Осерманов тензор от тип* (r, s).

2. *Ако* I *е унитарна почти комплексна структура, тогава алгебричният тензор на кривина* R_I *е Осерманов тензор от тип* (r,s).

3. *Ако* J *е унитарна пара- комплексна структура, тогава алгебричният тензор на кривината* R_J *е Осерманов тензор от тип* (r, s).

Теорема 6. *Нека* c_i $(i=0,1)$ *са реални числа със свойството* $c_0c_1\neq 0$ *и нека* (r,s) *са допустими стойности за сигнатурата на линейното пространство над което е дефиниран алгебричният тензор на кривината* R. *Ако* K *е произволна унитарна пара-комплексна или почти-копмплексна структура, тогава за тензора на кривината* $R := c_0R_0 + c_1R_K$ *са в сила твърденията*:

$i)$ *Ако* $r+s=1$ *или* $r+s=m-1$, *тогава* R *е Осерманов от тип* (r, s) **;**

$ii)$ *Ако* $2\leq r+s\leq m-2$, *тогава* R *не е Осерманов от тип* (r, s).

Теорема 7. *Нека* g *е Лоренцова метрика и нека* R *е алгебричен тензор на кривина, който е Осерманов от тип* (r,s). *Ако* $2r+2s\neq m$ *или ако* $r+s=2$, *тогава* $R= c_0R_0$.

Теорема 8. *Нека* g *е Риманова метрика и нека* R *е алгебричен тензор на кривина, който е Осерманов от тип* $(2,0)$. *Тогава ако* m *е нечетно, то* $R= c_0R_0$**.** *Ако* $m\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$, *тогава или* $R= c_0R_0$ *или* $R:= c_1R_I$, *за някоя унитарна почти-комплексна структура* I.

Параграф 3. **В раздел 3.1 от §3** въвеждаме следната:

Дефиниция 4. *Казваме, че Римановото многообразие* (M,g) *е точково постоянно* k*-Станилово многообразие, ако операторът на Станилов от ред к, има точково постоянни собствени стойности, във всяка точка от многообразието.*

Основна за раздела е следната:

Теорема 2. *Едно четиримерно Риманово многообразие* (M,g) *е точково постоянно* 3-*Станилово*(*IP*) *многообразие тогава и само тогава, когато* (M,g) *е IP- многообразие.*

В раздел 3.2 от §3 въвеждаме следните дефиниции:

Дефиниция 1. *Векторното пространството V притежава константен пространственоподобен*(*времеподобен*) *ранг r, ако* $Rank(\kappa(\pi))=r$ *за произволна пространственоподобна*(*времеподобна*) *площадка* $\pi\in V$.

Дефиниция 2. *Векторното пространство V наричаме пространственоподобно*(*времеподобно*) *Жорданово-IP пространство, ако Жордановата нормална форма на кососиметричния оператор* κ *е константа за произволна пространственоподобна*(*времеподобна*) *площадка* $\pi\in V$.

Дефиниция 3. *Векторното пространство V наричаме k-пространственоподобно (времеподобно) Жорданово-Станилово пространство, ако Жордановата нормална форма на оператора на Станилов* $\Theta(\pi)$ *е константа върху Грасманиана* $\hat{G}r_{k,\pm}(V,g)$.

Дефиниция 4. *Псевдо-Римановото многообразие* (M,g) *със сигнатура* (p,q) *наричаме пространственоподобно(времеподобно) Жорданово-IP псевдо-Риманово многообразие, ако моделът* $\tau_P:=(M_P,g_P,R_P)$ *е пространственоподобен*(*времеподобен*) *Жорданов-IP модел, със сигнатура* (p,q), *във всяка точка* $P\in M$.

Дефиниция 5. *Псевдо-Римановото многообразие* (M,g) *със сигнатура* (p,q) *наричаме k-пространственоподобно*(*k-времеподобно*) *Жорданово-Станилово псевдо-Риманово многообразие, ако моделът* $\tau_P:=(M_P,g_P,R_P)$ *е k-пространственоподобен* (*k-времеподобен*) *Жорданово-Станилов модел, със сигнатура* (p,q), *във всяка точка* $P\in M$.

Основни резултати в раздела са следните:

Теорема 1.4. *Нека* (M,g) *е свързано пространственоподобно Жорданово-IP псевдо-Риманово многообразие със сигнатура* (p,q). *Да приемем още или, че* $(p,q)=(0,4)$ *или, че* $q\geq 5$. *Да приемем, че операторът на кривина* $\kappa(\pi)$ *не е нилпотентен за поне една пространственоподобна площадка* $\pi\in M_P$ *и, че моделат* τ_P *има пространственоподобен ранг* 2, *във всяка точка* $P\in M$. *Тогава*:

a) (M,g) *е k-пространственоподобно Жорданово-Станилово многообразие за произволно естествено число* $k\in[2,q]$;

б) (*M*,*g*) *е* *k-времеподобно Жорданово-Станилово многообразие за произволно естествено число* $k\in[2, p]$.

Теорема 1.5. *Нека* (*M*,*g*) *е свързано Риманово многообразие с размерност m, където* $m\neq 3$, 7. *Ако* (*M*,*g*) *е* 2*-Станилово многообразие, тогава* (*M*,*g*) *е IP-многообразие с постоянен пространственоподобен ранг равен на* 2.

Параграф 4. **В раздел 4.1 от § 4** представяме основни дефиниции и свързани с тях резултати на които се базира комутационната теорията за операторите на кривина. Нека $\mathcal{M}$ е произволно псевдо-Риманово многообразие със сигнатура (*p*,*q*), и метрика *g*, нека (g_{ij}) е матрицата на *g* относно произволен ортонормиран базис, съответно с (g^{ij}) означаваме обратната и матрица. В параграфа използваме *операторът на Якоби* $\mathcal{J}$, *операторът на Ричи* $\boldsymbol{\rho}$, *тензор на кривина* $\mathcal{R}$, *скаларна кривина* $\boldsymbol{\tau}$, *конформния тензор на Вайл* $\mathcal{W}$ *и конформния оператор на Якоби* $\mathcal{J}_W$, *дефинирани чрез равенствата*:

$$\mathcal{J}(x):=\boldsymbol{y}\to\mathcal{R}(y,x,x) \quad ,\boldsymbol{\rho}(x)=\sum_{i,j=1,..,n} g^{ij}\,\mathcal{R}(x,e_i)e_j\ , \quad \mathcal{R}(x,y,z,u)=g(\mathcal{R}(x,y,z),w),$$

$$\boldsymbol{\tau}=\mathrm{Trace}(\boldsymbol{\rho})=\sum_{i,j,k,l} g^{il}g^{jk}\mathcal{R}(e_i,e_j,e_k,e_l)\ ,$$

$$\mathcal{W}(x,y)=\mathcal{R}(x,y,z)-\frac{\boldsymbol{\tau}(g(y,z)x-g(x,z)y)}{(m-1)(m-2)}$$

$$+\frac{g(\boldsymbol{\rho}y,z)x-g(\boldsymbol{\rho}x,z)y+g(y,z)\boldsymbol{\rho}x-g(x,z)\boldsymbol{\rho}y}{(m-2)},$$

$$\mathcal{J}_W(x,y):=\boldsymbol{y}\to\mathcal{W}(y,x,x).$$

Дефиниция 2. *Нека* $\mathcal{M}$ *е произволно псевдо-Риманово многообразие*. *Тогава казваме, че*:

1. $\mathcal{M}$ *е многообразие на Якоби-Станилов, ако*

$$\mathcal{J}(\xi_1)\circ\mathcal{J}(\xi_2)=\mathcal{J}(\xi_2)\circ\mathcal{J}(\xi_1)\quad ,$$

за произволна двойка вектори ξ_1, ξ_2 *принадлежащи на* $\boldsymbol{S}_p^{\pm}(\mathcal{M})$, *във всяка точка* $p\in\mathcal{M}$;

2. $\mathcal{M}$ *е смесено-Станилово многообразие, ако*

$$\mathcal{R}(\xi_1,\xi_2)\circ\mathcal{J}(\xi_3)=\mathcal{J}(\xi_3)\circ\mathcal{R}(\xi_1,\xi_2)\ ,$$

за произволна тройка вектори ξ_1, ξ_2 , ξ_3 *принадлежащи на* $\boldsymbol{S}_p^{\pm}(\mathcal{M})$, *във всяка точка* $p\in\mathcal{M}$;

3. $\mathcal{M}$ *е косо -Станилово многообразие, ако*

$$\mathcal{R}(\xi_1,\xi_2)\circ\mathcal{R}(\xi_3,\xi_4) = \mathcal{R}(\xi_3,\xi_4)\circ\mathcal{R}(\xi_1,\xi_2),$$

за произволна четворка вектори $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ *принадлежащи на* $\mathbf{S}_p^{\pm}(\mathcal{M})$, *във всяка точка* $p\in\mathcal{M}$;

4. $\mathcal{M}$ *е Якоби-Ричи многообразие, ако*

$$\mathcal{J}(\xi)\circ\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}\circ\mathcal{J}(\xi),$$

за произволен единичен вектор ξ *принадлежащи на* $\mathbf{S}_p^{\pm}(\mathcal{M})$, *във всяка точка* $p\in\mathcal{M}$.

5. $\mathcal{M}$ *е косо-Ричи многообразие, ако*

$$\mathcal{R}(\xi_1,\xi_2)\circ\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}\circ\mathcal{R}(\xi_1,\xi_2),$$

за произволна двойка ξ_1, ξ_2 *принадлежащи на* $\mathbf{S}_p^{\pm}(\mathcal{M})$, *във всяка точка* $p\in\mathcal{M}$.

Ако $\mathcal{M}=(M,g)$ е произволно псевдо-픈Риманово многообразие, то във всяка точка $p\in M$, наредената тройка (M_p, g_p, R_p) задава асоцииран с точката модел, който означаваме с $\mathfrak{M}(\mathcal{M},p) = (M_p, g_p, R_p)$. В сила е следната

Теорема 1. *Нека* $\mathfrak{M}$ *е модел и нека* T *е самоспрегнато линейно изображение във векторното пространство* V. *Тогава следните равенства са еквивалентни*:

1. $\mathcal{R}(x,y)T= T\,\mathcal{R}(x,y)$ *за произволни вектори* $x,y\in V$;
2. $\mathcal{J}(x)T= T\,\mathcal{J}(x)$ *за произволен вектор* $x\in V$;
3. $\mathcal{R}(Tx,y,z,w)= \mathcal{R}(x,Ty,z,w)= \mathcal{R}(x,y,Tz,w)= \mathcal{R}(x,y,z,Tw)$.

От този резулатат следва еквивалентността на Якоби-Станиловите и смесено-Станиловите условия, а също така и еквивалентността на Якоби-Ричи и косо-Ричи условията. Поради тази причина в параграфа разглеждаме псевдо-Римановите многообразия и модели които удовлетворяват Якоби-Станилов, косо-Станилов и Якоби-Ричи условията.

В раздел 4.2 от § 4 разглеждаме многообразията и моделите на Якоби-Станилов, като по-важни резултати са следните:

Теорема 2. *Ако* $\mathfrak{M}$ *е Якоби-Станилов Риманов модел, тогава* $\mathcal{R}=0$.

Теорема 4. *Нека* $\mathcal{M}$ *е* m *–мерно произволно Риманово многообразие.*

а) *Ако* $m>2$, *тогава* $\mathcal{M}$ *е ортогонално Якоби-Станилово многообразие, точно когато* $\mathcal{M}$ *е има точково постоянна секционна с* ;

(*б*) *Ако* $m=2$, *тогава* $\mathcal{M}$ *е винаги ортогонално Якоби-Станилово Риманово многообразие.*

Дефиниция 5. *Нека* $\mathfrak{M}=(V, g, R)$ *е псевдо-Риманов модел. Казваме, че* $\mathfrak{M}$ *е конформен Якоби-Станилов модел, ако* $\mathcal{J}_W(x) \circ \mathcal{J}_W(y) = \mathcal{J}_W(y) \circ \mathcal{J}_W(x)$ *, за произволна двойка вектори x и* $y \in V$.

Дефиниция 6. *Нека* $\mathcal{M}$ *е произволно псевдо-Риманово многообразие. Казваме, че* $\mathcal{M}$ *е конформно Якоби-Станилово многообразие, ако* $\mathcal{J}_W(x) \circ \mathcal{J}_W(y) = \mathcal{J}_W(y) \circ \mathcal{J}_W(x)$ *, за произволна двойка вектори* $x, y \in M_p$, *във всяка точка* $p \in M$.

В раздела даваме следния пример за Якоби -Станилов модел:

Пример 5. Нека $\{\alpha_i, \alpha_i^*, \beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \beta_{4,1}, \beta_{4,2}\}_{1\le i\le 3}$ е ортонормиран базис за реалното векторно пространство $\mathbf{R}^{14}$. Дефинираме псевдо-Римановото многообразие на Якоби-Станилов $\mathcal{M}_{6,8}$, със следната метрика $\langle \bullet, \bullet \rangle$:

$$\langle \alpha_i, \alpha_i^* \rangle = \langle \beta_{i,1}, \beta_{i,2} \rangle, \;\; 1 \le i \le 3,$$

$$\langle \beta_{4,1}, \beta_{4,2} \rangle = \frac{1}{4} \;, \; \langle \beta_{4,1}, \beta_{4,1} \rangle = \langle \beta_{4,2}, \beta_{4,2} \rangle = -1 \;\;,$$

$$R_{\alpha_2, \alpha_1, \alpha_1, \beta_{2,1}} = R_{\alpha_3, \alpha_1, \alpha_1, \beta_{3,1}} = R_{\alpha_3, \alpha_2, \alpha_2, \beta_{1,2}} = 1 \;,$$

$$R_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \beta_{1,2}} = R_{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_3, \beta_{1,1}} = R_{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_3, \beta_{2,2}} = 1 \;,$$

$$R_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_{4,1}} = R_{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, \beta_{4,1}} = R_{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1, \beta_{4,2}} = R_{\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3, \beta_{4,2}} = -\frac{1}{2}.$$

В раздел 4.3 от § 4 разглеждаме Римановите косо-Станилови многообразия и модели, които напълно се характеризират със следната:

Теорема 6. *Нека* $\mathfrak{m}$ е *Риманов коcо-Станилов модел. Тогава съществува ортогонална разлагане в директна сума от вида*

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_K \oplus U,$$

където $dim(V_k)=2$, *U е тотално изотропно подпространство и където* $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_K \oplus O.$

В раздела даваме пример за косо-Станилови модели:

Пример 7. А. Нека $\mathcal{M}=(0,\infty)\times\mathcal{N}$, където $\mathcal{N}$ е Риманова хиперповърхнина със скаларна кривина $\tau_N\neq 1$. Нека $\mathcal{M}$ е изкривено произведение с метрика от вида $ds^2 = dt^2 + t^2 ds_N^2$. Тогава многообразието $\mathcal{M}$ е неразложимо косо-Станилово многообразие със скаларна кривина $\tau_{\mathcal{M}} = t^{-2}(\tau_{\mathcal{N}} - 1)$.

Б. Нека x_1, x_2, x_3, x_4 е ортонормиран базис за реалното векторно пространство $\mathbf{R}^4$. Тогава многообразието $\mathcal{M}_\beta=(\mathbf{R}^4,g)$, с метрика: $ds^2 = x_3^2 dx_1^2 + (x_3 + \beta x_4)^2 dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$, е неразложимо косо-Станилово многообразие със скаларна кривина $\tau_\beta = -2x_3^{-1}(x_3 + \beta x_4)^{-1}$.

Пример 8. Нека $\{x, u_1,.., u_{m-2}, y\}$ са стандартни координати в реалното векторно пространство $\mathbf{R}^m$. Нека изображението $f = f(\vec{u})$ е гладко изображение. Нека φ е неизродена билинейна форма върху реалното пространство $\mathbf{R}^{m-2}$. Разглеждаме многообразието $\mathcal{M}:=(\mathbf{R}^m,g)$, където ненулевите компоненти на метриката g са дадени чрез равенствата:

$$g(\partial_x,\partial_x) = -2f(\vec{u}),\ g(\partial_x,\partial_y) = 1,\ g(\partial_{u_a},\partial_{u_b}) = \varphi_{ab}.$$

Тогава многообразието $\mathcal{M}$ е косо-Станилово и 3-антинилпотентно многообразие, като $\mathcal{M}$ не е Якоби-Станилово многообразие.

В раздел 4.4 от §34 представяме нашите изследвания и резултати върху многообразията и моделите на Якоби-Ричи, като работим едновременно в алгебричен и геометричен контекст.

Дефиниция 10. *Казваме, че* $\mathfrak{M}:=(V,g,A)$ *е* 0-*модел, ако* g *е неизродено скаларно произведение със сигнатура* (p,q), *дефинирано върху крайномерното векторно пространство* V *с размерност* $m=p+q$, *и ако* A *е алгебричен тензор на кривина, т.е* $A\in\oplus^4 V^*$.

Дефиниция 11. *Казваме, че* 0- *моделът* $\mathcal{M}:=(V,g,A)$ *е разложим, ако съществува нетривиално ортогонално разлагане* $V=V_1\oplus V_2$, *което разлага* $A=A_1\oplus A_2$, *като в този аспект можем да запишем* $\mathcal{M}=\mathcal{M}_1\oplus\mathcal{M}_2$, *където* $\mathcal{M}_i=(V_i, g\,|\,V_i,\ A_i)$.

Дефиниция 12. *Казваме, че* 0-*моделът* $\mathcal{M}:=(V,g,A)$ *е неразложим, ако този модел не е неразложим.*

Дефиниция 13. *Казваме,че* 0-*моделът* $\mathcal{M}:=(V,g,A)$ *е Айнщайнов, ако операторът на Ричи е скаларно кратен на идентитета на* V.

Дефиниция 14. *Казваме, че* 0-*моделът* $\mathcal{M}:=(V,g,A)$ *е псевдо-Айнщайнов, ако операторът на Ричи* ρ *има точно една реална собствена стойност или операторът на Ричи* ρ *има точно две комплексно спрегнати собствени стойности.*

По-важни резултати в раздела са следните:

Теорема 7. *Ако* $\mathcal{M}$ *е неразложим* 0-*модел на Якоби-Ричи, тогава* $\mathcal{M}$ *е псевдо-Айнщайнов* 0-*модел.*

Теорема 8. $\mathcal{M}$ *е Риманов неразложим* 0-*модел на Якоби-Ричи, тогава и само тогава, когато* $\mathcal{M}$ *е Айнщайнов 0-модел.*

Теорема 9. *Нека* $\mathcal{M}:=(V,g,A)$ *е* 0-*модел. Тогава следните твърдения са еквивалентни и ако поне едно от тях е вярно казваме, че* $\mathcal{M}:=(V, g, A)$ *е* 0-*модел на Якоби-Ричи*:

(1) *Съществува наредена двойка* (r_0,s_0) *такава, че*

$$J(\pi)\mathrm{o}J(\pi^{\perp})=J(\pi^{\perp})\mathrm{o}J(\pi)\ ,$$

за всяко $\pi\in Gr_{r_0,s_0}(V,g)$;

(2) $$J(\pi)\mathrm{o}J(\pi^{\perp})=J(\pi^{\perp})\mathrm{o}J(\pi),$$

за всяко неизродено подпространство $\pi\subset V$;

(3) $[J(\pi)\,\mathrm{o}\rho]=0$, *за произволно неизродено подпространство* $\pi\subset V$.

Теорема 10. *Нека* $\mathcal{M}$ **:=**(V,g,A) *е* 0-*модел с произволна сигнатура. Ако* $\mathcal{M}$ **:=**(V,g,A) *е* 0-*модел на Якоби-Ричи, тогава можем да разложим този модел в директна сума от вида* $\mathcal{M}=\mathcal{M}_1\oplus\ldots\oplus\mathcal{M}_k$, *където всяко* $\mathcal{M}_i (i=1,2,..,k)$ *е псевдо-Айнщайнов* 0-*модел.*

Теорема 11. *Нека $\mathcal{M}$:=(V,g,A) е Риманов 0-модел. Тогава $\mathcal{M}$:=(V, g, A) е 0-модел на Якоби-Ричи, тогава и само тогава когато $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{M}_k$, където всяко $\mathcal{M}_i$(i=1,2,..,k) е Айнщайнов 0-модел.*

Дадени са следните примери:

Пример 9. Нека (x_1, x_2, x_3, x_4) са кооординати върху $\mathbf{R}^4$. Нека $\mathcal{M}$=($\mathbf{R}^4$,g), където

$$g(\partial_{x_1},\partial_{x_3}) = g(\partial_{x_2},\partial_{x_4}) = 1 \ ,$$

$$g(\partial_{x_3},\partial_{x_3}) = -g(\partial_{x_4},\partial_{x_4}) = s x_1 x_2 \ ,$$

$$2g(\partial_{x_3},\partial_{x_4}) = s(x_2^2 - x_1^2)$$

Тогава са в сила твърденията:

1. $\mathcal{M}$ е локално-симетрично многообразие със сигнатура (2,2) и е многообразие на Якоби-Ричи ;
2. $\mathcal{M}$ е косо-Станилово многообразие ;
3. $\mathcal{M}$ е конформно-Осерманово многообразие.

Пример 10. Нека (x_1, x_2, x_3, x_4) са кооординати върху $\mathbf{R}^4$. Нека $\mathcal{M}$ =($\mathbf{R}^4$,g), където

$$g(\partial_{x_1},\partial_{x_3}) = g(\partial_{x_2},\partial_{x_4}) = 1 \ , \ g(\partial_{x_3},\partial_{x_3}) = -s x_1 x_2^2 \ ,$$

$$2g(\partial_{x_3},\partial_{x_3}) = -2g(\partial_{x_4},\partial_{x_4}) s(x_2^2 - x_1^2)$$

Тогава $\mathcal{M}$ е многообразие на Якоби-Ричи и косо-Станилово многообразие

В последния раздел 4.5 от параграфа характеризираме многообразията на Станилов- Видев, определени чрез следната:

Дефиниция 1. *Едно n-мерно Риманово многообразие (M,g) се нарича многообразие на Станилов-Видев, ако всяко двумерно подпространство $\alpha \subset M_p$, във всяка точка $p \in M$, удовлетворява равенството*:

(1) $$\kappa_\alpha \circ R_\alpha = R_\alpha \circ \kappa_\alpha \quad .$$

Основен резултат в параграфа е:

Теорема 14. *Едно четиримерно Риманово многообразие (M,g) е многообразие на Станилов-Видев тогава и само тогава когато (M,g) е многообразие с постоянна секционна кривина.*

III. АВТОРСКА СПРАВКА ЗА ПРИНОСИТЕ В ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

Получените резултати в настоящия дисертационен труд представляват оригинален принос в изследването на Римановите и псевдо-Риманови многообразия и модели чрез операторите на Якоби и Станилов. С направените изследвания върху спектралната геометрия и чрез комутационни условия за тези оператори на кривина дефинираме и характеризираме редица класове от нови и класически Риманови и псевдо-Риманови многообразия и модели. Според автора на дисертационния труд по-важни резултати в представената дисертация са следните:

- Характеризиране на точково постоянните Осерманови многообразия и хиперповърхнини чрез характеристичните коефициенти и чрез собствените стойности на оператора на Якоби, както и на обобщените комплексни пространствени форми, и на почти Ермитовите многообразия с точково постоянна холоморфна секционна кривина, чрез дуалния принцип на Ракич и условие за идемпотентност на оператора на Якоби;

- Въвеждане на обобщен оператор на Якоби и характеризиране на псевдо-Римановите многообразия и модели, за които този оператор има точково постоянен характеристичен полином и които наричаме обобщени Осерманови псевдо-Риманови многообразия и модели. Получили сме критерии за връзка между Осермановите и обобщените Осерманови псевдо-Риманови многообразия и модели, в зависимост от размерността и сигнатурата както на многообразието или модела, така и на индуциращото обобщения оператор на Якоби, неизродено и неизотропно подпространство;

- Обобщаване на кососиметричния оператор, чрез оператор на кривина, наречен оператор на Станилов. В псевдо-Риманов контекст *IP*-условието за точкова постояност на кососиметричния оператор на кривина е обобщено като условие, наложено за Жордановата нормална форма и за ранга на оператора на Станилов от ред k. Характеризирани са класовете от Риманови и псевдо-Риманови многообразия и модели с посоченото свойство, в зависимост от това дали кососиметричния оператор на кривина е нилпотентен и в зависимост от това дали пораждащото оператора на Станилов от ред k подпространство е времеподобно или пространственоподобно. Изведени са експлицитни формули за метриката на характеризираните от нас многообразия и модели. Направена е връзка между *IP*-условията и условията на Станилов. Изброените теореми допълват класификацията на *IP*-многообразията, при размерност на многообразието различна от 3, 4 и 7, в зависимост от сигнатурата на многообразието. Характеризирани са псевдо-Римановите *k*-Станилови многообразия с неутрална сигнатура и някои специфични сигнатури. Разгледани са кососиметричния оператор на кривина и оператора на Станилов от ред *k*, за някои специфични псевдо-Евклидови векторни пространства и са дефинирани кривинно-хомогенни и други фамилии от *IP* и *k*-Станилови векторни пространства. Проведените от нас изследвания показват, че спектралната геометрия на тензора на кривина на псевдо-Римановите многообразия и модели е твърде разнообразна в зависимост от размерността и сигнатурата на многообразието или модела.

- Въвеждане на комутационната теория за операторите на кривина, чрез която дефинираме и характеризираме редица многообразия и модели удовлетворяващи тази теория, които ние наричаме, или са наречени от други автори, многообразия на Якоби-Станилов, смесено-Станилови многообразия, косо-Станилови многообразия, многообразия на Якоби-Ричи, многообразия на Станилов-Видев. Доказваме критерии, чрез които се дават експлицитни формули за тензорите на кривина на тези многообразия и модели, в зависимост от размерността на базовото пространство. Изведени са примери за дефинираните модели, на базата на стандартно реално векторно пространство, като е зададена метриката на модела.

- Специално място е отделено на Римановите и псевдо-Риманови многообразия и модели на Якоби-Ричи, които се характеризират със свойството оператора на кривина и тензора на Ричи да комутират във всяка тяхна точка. Те са Айнщайнови или псевдо-Айнщайнови ако са неразложими, а ако са разложими, те са директно произведение от Айнщайнови или псевдо-Айнщайнови многообразия и модели. Приведени са примери за многообразия и модели на Якоби-Ричи, базирани на реално векторно пространство, като е дадена метриката на модела. Обикновено такива модели удовлетворяват и някои от другите дефиниции въведени от нас, както и Осермановите и конформно Осермановите условия.

V. БИБЛИОГРАФИЯ

1. Петров А. З., *Пространства Эйнштейна. Государственое издателство Физико-Математической литературы*. Москва (1961)

2. Станилов Г., *Диференциална геометрия*. София, Наука и изкуство(1988)

3. Станилов Г., *Върху геометрията на Римановите и на почти Ермитовите многообразия.* Дисертация за присъждане на научната степен “Доктор на математическите науки”, София (1977)

4. Широков П., *Симетрические конформно-евклидовы пространства.* Изв. Казанск. физ.-мат. об-ва сер. 3 (1938) , 11

5. Видев В., *Оператори на кривината в Римановата и Лоренцовата геометрия*. Докторска дисертация, София(1998)

6. Akivis M., *On the real theory of four dimensional conformal structures*. J. Geom. Physics 21 (1996), 55-80

7. Akivis M., V. Konnov, *Local aspects in conformal structure theory.* Uspekhi Mat. Nauk 48 1993 (1) pages 3-40 (in Russian); English transl. in Russian Math. Surveys 48 (1993) , 1-35

8. Alekseevsky D. , N.Blazic, N.Bokan, Z.Rakic, *Self-dual and pointwise Osserman spaces*. Arch. Math.(Brno),35(1999),193-201

9. Alekseevski D., N.Bokan, N.Blazic, Z.Rakic, *Self duality and pointwise Osserman condition*. Arch. Mathematicum, 3(35), (1999)

10. Baros M, A.Romero, *Indefinite Käler manifolds.* Math. Ann. 261(1982), 55-62

11. Besse A., *Geometrie Riemanniene et dimension* 4. Cedic/Fernand Nathan Paris (1981)

12. Blazic N., N.Bokan, Z.Rakic, *Characterization of four-dimensional Osserman pseudo-Riemannian manifols.* Balkan.J.Geom. Apl.2(1997),1-12

13. Bonome A., R.Castro, E.Garcia-Rio, L.M.Hervella, R.Vásquez-Lorenzo, *Nonsymmetric Osserman indefinite Kähler manifolds*. Proc. Amer. Math. Soc.(1998)

14. Bonnome A., P.Castro, E.Garcia-Rio,*Generalized Osserman four-dimensional manifolds*. Classical and Quantum Gravity, Elselvier,(2001)

15. Brozos M.-Vazquez, E.G-Rio, P.Gilkey, R.Castro, *Tzankov-Videv Theory for Walker manifolds of signature* (2,2). Differential geometry, (2006), 53;

16. Brozos M.-Vazquez, E.GarciaRio, P.Gilkey,S.Nikcevic,R.Vàzquez Lorenco, *The Geometry of Walker Manifolds*, Morgan&Glaypool Publishers, (2009)

17. Brozos M. -Vázquez, E García-Río, P Gilkey and RVázquez-Lorenzo, *Examples of signature* (2,2) *manifolds with commuting curvature operators* . J. Phys. A: Math. Theor. 40, (2007)

18. Brozos M. -Vàzquez, B.Fiedler, E.García-Río, P.Gilkey, S.Nikćevic, G.Stanilov, Y.Tzankov, R.Vàzquez-Lorenzo, V.Videv, *Stanilov-Tsankov-Videv Theory.* Symmetry, Integralbility and Geometry: Methods and Applications(USA), 3, (2007), 1- 14.

19. Brunetti L., *An Osserman-type conditions on gff manifolds with Lorentz methrics.* ArXiv.math 1106.613,(2011)

20. Brunetti L., *About a new type of Osserman condition on Lorentz S manifolds.* Shi works University of Bary Italy, (2011)

21. Cadea P. , J. Masqué, *Classification of non-flat para Kählerian space forms.* Houston J. Math. 21(1995), 89-94

22. Calvaruso C., E.Garcia-Rio, *Algebraic Properties of Curvature Operators in Lorentzian Manifolds with Large Isometry Groups.* SIGMA, (2010)

23. Chi Q.-Sh., *A curvature characterization of certain locally rank-one symmetric spaces*. J.Diff.Geom. 28(1988), 187-202

24. Degla S., *g-Natural metrics on tangent bundles and Jacobi operators.*Arxiv preprint arXiv:0907.5226,(2009)

25. Defever F., J.M.Morvan, I.Van de Woestijne, V.Verstraelen, G.Zafindratafa, *Geometry and topology of Submanifolds* IX. World Scientific Publishing Co(1999)

26. Diaz-Ramos J., E.G.-Río, R.Vázquez-Lorenzo, *New examples of Osserman metrics with nondiagonalizable Jacobi operators*. Differential Geometry and its Applications, Volume 24, Issue 4, Pages 433-442(2006)

27. Dotti I., M.Druetta, *Negatively curved homogeneous Osserman spaces*. Differential Geom. Apl. 11(1999),163-178

28. Dotti I., M. Druetta, *Osserman-p spaces of Iwasawa, type*. Differential geometry and applications, 61-72, (1999)

29. Dunn C., C. Franks, J. Palmer, *On the structure group of a decomposable model space.* ArXiv/math: 1108.224(2011)

30. Ganchev G., *Characteristic of some calsses of almost Hermitian manifolds.* Serdica 4 (1978), 19-3

31. Ganchev G., *Almost Hermitian manifolds similar to the complex space forms.* Comptes rendus de l, Academie bulgare des Science, 32 (1979), 1179 – 1182

32. Garcia E.-Rio, Demir N.Kupeli, Ramon Vazquez-Lorenzo, *Osserman manifolds in semi-Riemannian geometry.* Springer-Verlag(Berlin; Heidelber; New York, ISBN 3-540-43144-6)(2000)

33. Gilkey P., V.Videv, *Jacobi-Jacobi commuting models and manifolds.* Journal of Geometry, 92(2009), Birkhäuser Verlag Base/Switzerland, 61-68

34. Gilkey P., G.Stanilov, V.Videv, *Pseudo-Riemannian manifolds whose generalized Jacobi operator has a constant characteristic polynomial.* Journal of Geometry(Basel), 62(1998), 144-153

35. Gilkey P., S.Nikćevic, V. Videv, *Manifolds which are Ivanov-Petrova or k-Stanilov.* Journal of Geometry, 80(2004), 82-94

36. Gilkey P., A.Swann, L.Vanchecke, *Isoparametric geodesic spheres and a conjecture of Osserman concerning the Jacobi operator*, Quart. J. Math. Oxford(2), (1995)

37. Gilkey P., *Local invariants of a Riemannian metric for two dimensional manifolds*, Indiana Univ Math J, V 23 (1974), 855-882.

38. Gilkey P., Jon Sacks, *Spectral geometry and manifolds of constant holomorphic sectional curvature.* Proc. Symp. in Pure Math, V 27 (1975), 281-285

39. Gilkey P., *The geometrical index theorem for Clifford modules Topics in Mathematical Analysis.* Edited by T.M.Rassias,(1989), World Scientific Press, 315-327

40. Gilkey P., *Spectral Geometry of Riemannian Manifolds.* Contemporary Mathematics, 101 (1989), 147-154

41. Gilkey P., *Manifolds whose odd higher order curvature operators have constant eigenvalues at the basepoint.* Journal of Geometrical Analysis, V 22 (1992), 151-156.

42. Gilkey P., *On the index of geometrical operators on Riemannian manifolds with boundary*, Advances in Mathematics, 102 (1993), 129-183

43. Gilkey P., *The geometry of curvature homogeneous pseudo-*Riemannian *manifolds.* Imperial College Press. Series Editor: Dennis Barden, (2007), ISSN 1753-657.

44. Gilkey P., *Manifolds whose curvature operator has constant eigenvalues at the basepoint.* Journal of Geometrical Analysis, 4(1994), 155-158

45. Gilkey P., A.Swann, L.Vanhecke, *Isoparametric geodesic spheres and a conjecture of Osserman concerning the Jacobi operator*. Joint with Swann and Vanhecke. Quart J Math. Oxford 46 (1995), 299-320.

46. Gilkey P., B. Botvinnik, *Metrics of positive scalar curvature on spherical space forms*. With. Canadian Math Journal v48 (1996), 64-80.

47. Gilkey P., N.Blazic and N. Bokan, *A note on Osserman Lorentzian manifolds.* Bulletin of the London Math Society vol 29 (1997), 2, 227-230.

48. Gilkey P., N.Bokan and U.Simon, *Geometry of differential operators on Weyl manifolds*. Joint with Bokan and Simon. Proc R. Soc. London A (1997) vol 453 pages 2527-2536

49. Gilkey P., *Generalized Osserman Manifolds.* Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitaet Hamburg, 68 (1998), 125-127

50. Gilkey P., N.Bokan, U.Simon, *Spectral invariants of affine hypersurfaces.* Publications de l'Institut Mathematique Vol 64 (1998), 133-145.

51. Gilkey P., *Riemannian manifolds whose skew-symmetric curvature operator has constant eigenvalues* II. Differential geometry and applications (ed Kolar, Kowalski, Krupka, and Slovak) Publ Massaryk University Brno Czech Republic (1999), ISBN 80-210-2097-0, 73-87

52. Gilkey P., J.Leahy, H.Sadofsky, *Riemannian manifolds whose skew-symmetric curvature tensor has constant eigenvalues*. Indiana Univ. Math.(1999)

53. Gilkey P., *Relating algebraic properties of the curvature tensor to geometry.* Novi Sad J Math V29 (1999), 109-119

54. Gilkey P., *Algebraic curvature tensors which are p-Osserman*. Differential Geometry and its Applications, 14 (2001), 297-311.

55. Gilkey P., R.Ivanova, *Geometric consequences of some algebraic properties of the curvature tensor*. Bull. Math. Soc. Sc. Math. Roumanie Tome 45 (93) (2000), 255-265

56. Gilkey P., T.Zhang, *Algebraic curvature tensors whose skew-symmetric curvature operator has constant rank* 2. Periodica Mathematica Hungarica, Vol 44 (2002), 7-26

57. Gilkey P., R.Ivanova, *The geometry of the skew-symmetric curvature operator in the complex setting*. Joint with R. Ivanova. Global Differential Geometry: The Mathematical Legacy of Alfred Gray Ed. M Fernández and J. Wolf, Contemporary Mathematics vol 288 - ISBN 0-8218-2750-2 (2001), 325-333

58. Gilkey P., R. Ivanova, *The Jordan normal form of Osserman algebraic curvature tensors*. Resul. Math. 40 (2001) 192-204.

59. Gilkey P., T. Zhang, *Algebraic curvature tensors for indefinite metrics whose skew-symmetric curvature tensor has constant Jordan normal form.* Houston Math J 11 (Chern Volume) **28** (2002), 311-328.

60. Gilkey P., *Geometric Properties of Natural Operators Defined by the Riemann Curvature Tensor.* Available from World Scientific ISBN 981-02-4752-4

61. Gilkey P., I.Stavrov, *Curvature tensors whose Jacobi or Szabo operator is nilpotent on null vectors*. Bulletin of the London Math. Soc. 34 (2002), 650-658

62. Gilkey P., R.Ivanova, *The Jordan normal form of higher order Osserman algebraic curvature tensors*. Joint with R. Ivanova. Comment. Math. Univ. Carolinae 43 (2), (2002), 231-242, Comment. Math. Univ. Carolinae

63. Gilkey P., R.Ivanova, *Spacelike Jordan Osserman algebraic curvature tensors in the higher signature setting.* Joint with R. Ivanova. Proceedings Valencia Conference. World Scientific. ISBN 981-02-4906 (2002) 179-186

64. Gilkey P., R.Ivanova, T.Zhang, *Higher order Jordan Osserman, Pseudo-Riemannian manifolds.* Class and Quantum Gravity, 19 (2002), 4543-4551

65. Gilkey P., R. Ivanova, T. Zhang, *Szabo-Osserman IP Pseudo-Riemannian manifolds.* Publicationes Mathematicae Publ. Math. Debrecen 62 (2003), 387-401

66. Gilkey P., B.Fiedler, *Nilpotent Szabo, Osserman and Ivanov-Petrova pseudo-Riemannian manifolds*, Contemporary Mathematics,(2003), 53-64

67. Gilkey P., S.Nikcevic, *Curvature homogeneous spacelike Jordan Osserman pseudo-Riemannian manifolds*, Class. Quantum Grav 21,(2004), 497-507

68. Gilkey P., S.Nikcevic, *Nilpotent Spacelike Jordan Osserman pseudo-Riemannian manifolds*. Rendiconti del circolo mathematico di Palermo Serie II Suppl. 72 (2004), 99-105

69. Gilkey P., M. Brozos-Vazquez and S. Nikcevic, *Jacobi-Tsankov manifolds which are not* 2-*step nilpotent*, Proceedings of the conference Contemporary Geometry and Related Topics (2007), 63-80

70. Gilkey P., M. Brozos-Vazquez, *Pseudo-Riemannian manifolds with Commuting Jacobi Operators*. Rendiconti Del Circolo Matematico di Polermo Vol 55 (2006), 163-174

71. Gilkey P., M. Brozos-Vazquez, *Manifolds with commuting Jacobi operators*, Journal Geometry Volume 86 (2006), 21-30

72. Gilkey P., M.Brozos-Vazquez, *The global geometry of Riemannian manifolds with commuting curvature operators*. Journal Fixed Point Theory (2007), 87-96

73. Gilkey P., M.Brozos-Vazquez, E.-G.-Rio, *Relating the curvature tensor and the complex Jacobi operator of an almost Hermitian manifold*. Advances in Geometry. Volume 8, Issue 3, Pages 353-365

74. Gilkey P., N. Blazic, S. Nikcevic, and U. Simon, *Algebraic theory of affine curvature tensors*, Archivum Mathematicum, Masaryk University (Brno, Czech Republic), ISSN 0044-8753, 42 (2006)

75. Gilkey P., M.Brozos-Vazquez, *Complex Osserman Algebraic Curvature Tensors and Clifford Families*, Houston Journal of Mathematics, Vol. 34 (2008), 677-702

76. Gilkey P., M.Brozos-Vazquez, *The Geometry of Curvature Homogeneous Pseudo-Riemannian Manifolds*. Imperial College Press, ISBN 978-1-86094-785-8

77. Gilkey P., S.Nikčević. *Pseudo-Riemannian Jacobi–Videv Manifolds*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 4 ,(2006), 727–738.

78. Ivanova R., G.Stanilov, *A skew-symmetric curvature operator in Riemannian geometry*. Symposia Gaussiana, Conf. A, Eds.: Behara / Fritsch / Lintz, Berlin, New York (1995), 391-395

79. Ivanov S., I.Petrova, *Riemannian manifold in which the skew-symmetric curvature operator has constant eigenvalues.* Geometriae Dedicata 70(1998), 269-282

80. Kassabov O., *On the axiom of planes and the axiom of spheres in the almost Hermitian geometry*. Serdica 8 (1982), 109-114

81. Kobayashi S., K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. 1. Intercsience Publish. New York-London(1969)

82. Kobayashi S., K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. 2. Intercsience Publish. New York-London(1969)

83. Kowalski O., F. Tricerri and L. Vanhecke, *New examples of non homogenous Riemannian manifolds whose curvature tensor is that of a Riemannian symmetric space*, C.R.Acad.Sci. Paris Sér. I Math. 311(1990) 355-360

84. Kowalski O., F. Tricerri and L.Vanhecke, *Curvature homogeneous Riemannian manifolds*, J.Math.Pures appl. 71(1992) 471-501

85. Nikolaevsky Y., *Osserman Conjecture in dimension* $n \neq 8,16$. Math. Annalen 331(2005), 505-522

86. Nikolaevsky Y., Z. Rakic, *A note on the duality principle and Osserman condition.* Arxiv:1204.1600v1[math= DG], 7.04.2012

87. Osserman R., *Curvature in the eighties*. Journal Amer. Math. Monthly, vol. 97 (1990), 731-756

88. Rakic Z., *On duality Principle in Osserman manioflds*. Linear Algebra and its aplications. 296(1999), 183-189

89. Rakic Z., *Rank* 2 *symmetric Osserman spaces*. Bull. Austral. Math. Soc. 56 (1998), 517-521

90. Sekigawa K., L.Vanhecke, *Volume preserving geodesic symmetries in four-dimensional* 2-*stein spaces*. Kodai.Math J., 9(1986), 215-223

91. Singer I., J.Thorpe, *The curvature of four-dimensional Einstein spaces.* Global Analisys. Papers in Honour of K.Kodaira. University of Tokio press, Princeton University Press (1969)

92. Stavrov I., *Spectral geometry of the Riemann curvature tensor*, Ph.D.Thesis, University of Oregon(2003)

93. Stanilov G.,V.Videv, *On Osserman conjecture by characteristically coefficients.*Algebra,Group and Geometries(Cambridge-Massachussets),vol. 12(1993), 157-163

94. Stanilov G., V.Videv, *On the commuting of curvature operators.* Mathematics and Education in Mathematics(2004), 176-179

95. Stanilov G., *Higher Order Skew-symmetric and Symmetric Curvature Operators.* Comptes rendus de'l Academie bulgare des Science, v.57,No1, 2004

96. Sterbreti C., *Differentiable Operators on Geometrical structures.* Ph.D. Thesis, University of Crajova, 2004

97. Tricery F., L.Vanchecke, *Curvature tensors on almost Hermitian manifolds.* Trans. Amer. Math. Soc. 2676(1981), 365-398

98. Videv V., *A characteristic of the real space forms by a linear operator.* Plovdiv University "Paisii Hilendarski", Bulgaria, Scientific Works-Mathematics, vol.30. Book.3(1993)

99. Videv V.. *Characterization of a four-dimensional Riemannian manifolds by characteristic coefficients of Jacobi operator.* Mathematics and Education in Mathematics(1999), 160-166;

100. Videv V., *Characterization of a three- and four-dimensional Riemannian manifolds by a pointwise conditions on the three and the determinant of Jacobi operator.* Journal of Geometry(Basel), 71(2001), 197-205

101. Videv V., Y.Tzankov, *Stanilov manifolds and their characterization in dimension four.* Mathematics and Education in Mathematics(2001), 231-235

102. Videv V., Zh. Zhelev. *Riemannian manifolds with idempothent Jacobi operator.* Mathematics and Education in Mathematics (2009), 155-161

103. V.Videv, *Two Curvature Operators in Riemannian and Lorentzian Geometry.* Mathematika Balkanika, vol.15, (2001), fasc. 1-2, 7-25

104. Videv V., M.Ianova, *Four-dimensional Riemannian manifolds with a commuting Stanilov curvature operators.*Mathematics and Education in Mathematics (2004), 184-187 ;

105. V.Videv, J.Tzankov. *Curvature operators in the Relativity.* Trends in complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics, World Scientific. New Jersey•London•Singapore•Hong Kong, (2003), 219-228

106. Zhang T., *Manifolds with indefinite metrics whose skew-symmetric curvature operator has constant eigenvalues.* Ph.D.Thesis, University of Oregon(2000)

107. Zhelev Zh., M.Ivanova, V.Videv, *Four-dimensional Riemannian manifolds with commuting higher order Jacobi operator.*Plovdiv University "Paisii Hilendarski", Bulgaria, vol. 35, Book 3-Mathematics, (2007), 167-180

V. НАУЧНИ ПУБЛИКАЦИИ
ПО ПРОБЛЕМА НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

1.**Brozos M.-Vàzquez, B.Fiedler, E.García-Río, P.Gilkey, S.Nikćevic, G.Stanilov, Y.Tzankov, R.Vàzquez-Lorenzo, V.Videv. *Stanilov-Tsankov-Videv Theory.* Symmetry, Integralbility and Geometry: Methods and Applications(USA), 3, (2007), 1- 14 ;

2.**Gilkey P., G.Stanilov, V.Videv. *Pseudo-Riemannian manifolds whose generalized Jacobi operator has a constant characteristic polynomial.* Journal of Geometry(Basel), 62(1998), 144-153 ;

3.**Gilkey P., S.Nikćevic, and V.Videv. *Manifolds which are Ivanov-Petrova or k-Stanilov.* Journal of Geometry, 80(2004), 82-94 ;

4.**Gilkey P., V.Videv. *Jacobi-Jacobi commuting models and manifolds.* Journal of Geometry, 92(2009), Birkhäuser Verlag Base/Switzerland, 61-68 ;

5.**Ivanova M., Videv V., Zhelev Z., *Rakic Duality Principle in The Almost Hermitian Geometry*. Journal of Geometry, 104 (2013), 495-504 ;

6.**Ivanova M., V.Videv. *Four-dimensional Riemannian Stanilov-Videv manifold.* International Journal of Pure and Applied Mathematics, vol.89, № 1, (2013), 1-7 ;

7.*Stanilov G., V.Videv. *A characterization of the complex space forms.* Annulare de'l Universite de Sofia"St. Kliment Ohridski", Faculte de Matematiques et Informatique. Livre1-Mathematiques. Tome 85(1991), 39-42 ;

8.*Stanilov G., V.Videv. *On a generalization of the Jacobi operator in the Riemannian geometry.* Annulare de'l Universite de Sofia"St. Kliment Ohridski", Faculte de Matematiques et Informatique. Livre1-Mathematiques. Tome 86(1992), 27-35 ;

9.Stanilov G., V.Videv. *On the commuting of curvature operators.*Mathematics and Education in Mathematics(2004), 176-179 ;

10.*Videv V.. *A characteristic of the real space forms by a linear operator.* Plovdiv University "Paisii Hilendarski", Bulgaria, Scientific Works-Mathematics, vol.30. Book.3(1993), 5-8 ;

11.Videv V.. *Characterization of a four-dimensional Riemannian manifolds by characteristic coefficients of Jacobi operator*. Mathematics and Education in Mathematics(1999), 160-166 ;

12.*Videv V.. *Antiholomorphic curvature operator in the almost Hermitian geometry.* Annulare de'l Universite de Sofia"St. Kliment Ohridski", Faculte de Matematiques et Informatique. Livre 3, Tome 88(1999), 255-263 ;

13.**Videv V.. *Characterization of three- and four-dimensional Riemannian manifolds by a pointwise conditions on the three and the determinant of Jacobi operator*. Journal of Geometry(Basel), 71(2001), 197-205 ;

14.*Videv. V. *Two Curvature Operators in Riemannian and Lorentzian Geometry.* Mathematika Balkanika, vol.15, (2001), fasc. 1-2, 7-25 ;

15.*Videv V., G. Stanilov. *A curvature operator in Riemannian geometry.* Symposia Gaussiana. Conf.A. Eds. Behara/Fritsch/Lintz© Walter de Gruyter&Co, Berlin.New-York(1995), 445-450 ;

16. Videv V., Y.Tzankov. *Stanilov manifolds and their characterization in dimension four.* Mathematics and Education in Mathematics(2001), 231-235 ;

17. V.Videv, J.Tzankov, M.Stoeva. *Characterization of a four-dimensional Einstein-Riemannian manifolds by degenerated Jacobi operator and*

basises of Singer-Thorpe. Mathematics and Education in Mathematics(2002), 123-128;

18. Videv V., Y.Tzankov. *Curvature operators in the Relativity.* Trends in complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics, World Scientific. New Jersey•London•Singapore•Hong Kong, (2003), 219-228 ;

19. V.Videv, M.Ianova. *Four-dimensional Riemannian manifolds with a commuting Stanilov curvature operators.* Mathematics and Education in Mathematics (2004), 184-187 ;

20. Videv V., Zh.Zhelev. *Riemannian manifolds with idempothent Jacobi operator.* Mathematics and Education in Mathematics (2009), 155-161 ;

21.*Tzankov J., V.Videv. *Characterization of a four-dimensional globally Osserman manifolds using trace and determinant of Jacobi operator.* Plovdiv University "Paisii Hilendarski", Bulgaria, Scientific Works-Mathematics, vol.33. Book.3(2001), 153-162 ;

22.*Zhelev Zh., M.Ivanova, V.Videv. *Four-dimensional Riemannian manifolds with commuting higher order Jacobi operator.* Plovdiv University "Paisii Hilendarski", Bulgaria, vol. 35, Book 3, (2007), Mathematics, 167-180 ;

23. Ю.Цанков, В.Видев, М.Стоева. *Точково постоянни хиперповърхнини на Oсерман и Станилов в реално стандартно векторно пространство.* Съюз на учените Стара Загора' 2002, том 1., 40-46;

24.В.Видев, Ю.Цанков, М.Стоева. *Антихоломорфни Осерманови многообразия.* Годишник на Технически Университет-Варна (2001), 564-569, ISSN 1311-896X ;

25.В.Видев, Ю.Цанков, М.Стоева. *Холоморфни Осерманови многообразия.* Годишник на Технически Университет-Варна(2001), 576-581, ISSN 1311-896X ;

26.В.Видев. *Характеризиране на четиримерните глобални Осерманови Лоренцови многообразия чрез характеристичните коефициенти на оператора на Якоби и базиси на Торп.* Трудове на научната сесия РУ'2002, 95-100 ;

27.В.Видев, Ю.Цанков. *Обобщени точково постоянни Осерманови пространства.* Трудове на научната сесия РУ'2002, 101-105 .

Забележка. Статиите означени с * са реферирани в Zentralblatt MATH а статиите означени с ** са в списания с импакт фактор и също са реферирани в Zentralblatt MATH.

VI. ЦИТАТИ НА НАУЧНИТЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ПРОБЛЕМА НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

Статията

1. Brozos M.-Vàzquez, B.Fiedler, E.García-Río, P.Gilkey, S.Nikćevic, G.Stanilov, Y.Tzankov, R.Vàzquez-Lorenzo, V.Videv. *Stanilov-Tsankov-Videv Theory*. Symmetry, Integralbility and Geometry: Methods and Applications(USA), 3, (2007), 1- 14

е цитирана в

1.**García-Río E., Haji-Badali A., Vázquez-Abal M.E., Vázquez-Lorenzo R.. *Lorentzian 3-manifolds with commuting curvature operators*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 5 (2008), 557-572;

2.**Diaz A., C.Dunn. *The linear independence of sets of two and three canonical algebraic curvature tensors.* Electronic Journal of Linear Algebra(2010). ISSN 1081-3810, vol.20, pp 436-448;

3.**Calvaruso G., E. Garcia-Rio. *Agebraic properties of curvature operators in Lorentzian manifolds with large isometry groups.* SIGMA, 6(2010), 1-6;

4.**Dunn C., C. Franks, J. Palmer. *On the structure group of a decomposable model space.* Beitr Algebra, Geom. DOI 10.1007/S 13366-013-0185-z, Springer (2011);

5. Taylor K.. *Skew-Tsankov algebraic curvature tensors in the Lorentzian setting*. CSUSB REU,(2010).

Статията

2. Gilkey P., G.Stanilov, V.Videv. *Pseudo-Riemannian manifolds whose generalized Jacobi operator has a constant characteristic polynomial.* Journal of Geometry, 62,1998, 144-153

е цитирана в

6.**D. Alekseevski, N. Bokan, N. Blazic, Z. Rakic. *Self duality and pointwise Osserman condition*. Arch. Mathematicum, Brno, 3(35), 1999;

7.*F.Defever, J.M.Morvan, I.Van de Woestijne, Verstraelen, G.Zafindratafa[книга]. *Geometry and topology of Submanifolds* IX. World Scientific Publishing Co, 1999;

8.**Dotti, M. J. Druetta. *Osserman-p spaces of Iwasawa, type*. Differential geometry and applications, 61-72, Brno, 1999;

9. T. Zhang[книга]. *Manifolds with indefinite metrics whose skew-symmetric curvature operator has constant eigen-values*, Ph. D. thesis, University of Oregon, 2000;

10.**A.Bonome, P.Castro. A.Bonome, P.Castro and E.García-Río. *Generalized Osserman four-dimensional manifolds*, Class. Quantum Grav.18 , pp.4813–4822, 2001;

11.*Eduardo Garcia-Rio, Demir N.Kupelly, R.Vàzquez-Lorenzo[книга]. *Osserman manifolds in Semi-Riemannian Geometry*. Lectures Notes in Mathematics. Springer-Berlin, 2002;

12.C.Sterbreti[книга]. *Differentiable Operators on Geometrical structures.* Ph. D. Thesis, Univ. of Krajova, 2004;

13.**C.Sterbeti. *Higher Order Osserman pseudo-Riemannian manifolds of neutral signature* (2,2) . Balkan Journal of Geometry and Its Apllications, vol 10, No.1, pp. 175-178, 2005;

14.**J.C.Diaz-Ramos, E. G.-Río, R.Vázquez-Lorenzo. *New examples of Osserman metrics with nondiagonalizable Jacobi operators*. Differential Geometry and its Applications Volume 24, Issue 4, Pages 433-442, 2006;

15. L.Brinetti. *About a new type of Osserman condition on Lorentz S manifolds.* Shi works University of Bary Italy, 2011;

Статията

3. Gilkey P., S.Nikćevic, and V.Videv, *Manifolds which are Ivanov-Petrova or k-Stanilov.* Journal of Geometry, 80(2004), 82-94

е цитирана в

16. Diaz Ramoz J. *Geometric consequences of intrinsic and extrinsic curvature conditions.* Minerva.usc.es(2005)

17. Lozau E. *Propiedades geométricas de operadores de curvatura y generalizaciones de espacios simétricos*. Minerva.usc.es (2011)

Статията

4. Gilkey P., V.Videv. *Jacobi-Jacobi commuting models and manifolds.* Journal of Geometry, Birkhäuser Basel, Vol. 92, Numb. 1-2, March, 2009;

е цитирана в

18.**García-Río E., Haji-Badali A., Vázquez-Abal M.E.,Vázquez-Lorenzo R. *Lorentzian 3-manifolds with commuting curvature operators,* Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 5 , Word Scientific, vol.5, pp 557-572, (2008);

Статията

8. Stanilov G., V.Videv. *On a generalization of the Jacobi operator in the Riemannian geometry.* Annuare Univ. Sofia Fac. Math. Inform. 86, 1992, 27-35

е цитирана в

19.*P.Gilkey[книга]. *The geometry of curvature homogeneous pseudo-Riemannian manifolds.* Imperial College Press. ISSN 1753-657. Series Editor: Dennis Barden, 2007;

20.**M.Brozos-Vázquez, P.Gilkey. *The global geometry of Riemannian manifolds with commuting curvature operators,* Journal of Fixed Point Theory Appl.1, 2007;

21.**P.Gilkey, S.Nikčević. *Pseudo-Riemannian Jacobi–Videv Manifolds,* Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., vol.4 , 2006, 727–738;

22.**P.Gilkey, S.Nikčević. *Curvature homogeneous spacelike Jordan Osserman pseudo-Riemannian manifolds*, Class. Quantum Gravity, 2004;

23. M.Brozos-Vazquez, P.Gilkey. *Complex Osserman Algebraic Curvature Tensors and Clifford Families.* ArxivMath/0608749, 2006

24.*M.Brozos-Vazquez, E.GarciaRio, P.Gilkey, S.Nikcevic, R.Vàzquez Lorenco[книга]. *The Geometry of Walker Manifolds,* Morgan&Glaypool Publishers, 2009;

25.**E.Calvino-Louzao, E.Garcia-Rio, P.Gilkey,R.Vàzquez-Lorenzo. *Osserman Kaeler manifolds non-nilpotent Jacobi operator.* Geom. Dedicata, 2010;

26.**E.Calvino-Louzao, E.Garcia-Rio, P.Gilkey,R.Vàzquez-Lorenzo. *Higher-dimensional Osserman metrics with non-nilpotent Jacobi operators,.* Geom. Dedicata , 2012, 151-163;

27.**M.Brozos-Vazquez, P.Gilkey. *Complex Osserman Kaeler manifolds in dimension four.* Forum Mathematicum, Vol. 25, №2, 2013, 313-336 ;

28.**Gilkey P., B.Lim. *Projective affine Ossermann curvature models* J. Fixed Point Theory, to appear-2014;

29. Brozos-Vazquez M., P Gilkey. *Complex Osserman Kaehler Manifolds.*arXiv preprint arXiv:1003.5379, 2010

Статията

9. Stanilov G., V.Videv. *On the commuting of curvature operators.* Mathematics and Education in Mathematics, 2004, 176-180

е цитирана в

30.*P.Gilkey[книга]. *The geometry of curvature homogeneous pseudo-Riemannian manifolds.*; Imperial College Press, ISSN 1753-657. Series Editor:Dennis Barden, 2007;

31.**M.Brozos-Vazquez, E.GarciaRio, P.Gilkey, S.Nikcevic, R.Vazquez-Lorenco[книга]. *The Geometry of Walker Manifolds*, Morgan&Glaypool Publishers, 2009;

32. M.Brozos-Vazquez, P.Gilkey, Z.Rakic. *Jacobi-Tzankov manifolds which are not* 2*-step nilpotent*. Proceedings of the conference"Contemporary Geometry and Related Topics", 2005, Belgrade.

Статията

10. V.Videv. *A characteristic of the real space forms by a linear operator.* Plovdiv University "Paisii Hilendarski", Bulgaria, Scientific Works-Mathematics, vol.30, 1993

е цитирана в

33.*Gilkey P. [книга]. *The geometry of curvature homogeneous pseudo-Riemannian manifolds.* Imperial College Press, ISSN 1753-657, Series Editor:Dennis Barden, 2007;

Статията

16. Videv V., Y.Tzankov. *Stanilov manifolds and their characterization in dimension four.* Mathematics and Education in Mathematics(2001), 231-235 ;

е цитирана в

34**.P.Gilkey. *Curvature homogeneous spacelike Jordan Osserman pseudo-Riemannian manifolds.* Classical and Quantum Gravity, 2004;

35**. P.Gilkey, S.Nikćevic, and V.Videv. *Manifolds which are Ivanov-Petrova or k-Stanilov*. Journal of Geometry, vol. 80, 82-94, 2004;

36**. C.Dunn, P.Gilkey, R.Ivanona, S.Nikcevic. *The spectral geometry of the Riemann curvature operator in the higher signature setting.* Nonlinear Functional analisys and applications, special volume dedicated to Professor Grigorios Tsagas, scheduled to appear in September, 2004.;

Статията

22. Zhelev Zh., M.Ivanova, V.Videv. *Four-dimensional Riemannian manifolds with commuting higher order Jacobi operator*. Plovdiv University "Paisii Hilendarski", 2006

е цитирана в

37.**P.Gilkey and S. Nikčević, *Pseudo Riemannian Jacobi–Videv Manifolds*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 4, 727–738;

38.*M.Brozos-Vazquez, E.GarciaRio, P.Gilkey, S.Nikcevic, R.Vazquez-Lorenco[книга]. *The Geometry of Walker Manifolds*, Morgan&Glaypool Publishers, 2009;

39.**García-Río E., Haji-Badali A., Vázquez-Abal M.E., Vázquez-Lorenzo R.. *Lorentzian 3-manifolds with commuting curvature operators*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 5 (2008), 557-572;

40.**M Brozos-Vázquez, E García-Río, P Gilkey and R Vázquez-Lorenzo. *Examples of signature* (2,2) *manifolds with commuting curvature operators* . J. Phys. A: Math. Theor. 40, 2007;

41.**M.Brozos-Vazquez, E.G-Rio, P.Gilkey,R.Castro. *Tzankov-Videv Theory for Walker manifolds of signature* (2,2). Differential geometry, 2006, 53 .