ШУМЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ
"ЕПИСКОП КОНСТАНТИН ПРЕСЛАВСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА "АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ"

ИВАН СЛАВЕЙКОВ ИВАНОВ

НЬОТЕРОВАТА ЗАДАЧА В ТЕОРИЯТА НА ГАЛОА

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация
за придобиване на образователната и научна степен
"доктор"
в област на висше образование
4. Природни науки, математика и информатика;
професионално направление 4.5. Математика;
научна специалност Алгебра и теория на числата

Научен ръководител
проф. д-р Никола Петков Зяпков

Шумен
2016

Дисертационният труд е обсъден и предложен за защита на разширено заседание на катедра „Алгебра и геометрия“ към Факултет по математика и информатика на Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“, проведено на 10.05.2016 г.

Дисертационният труд се състои от увод, три глави, справка за приносите, списък на публикациите включени в дисертацията, апробация на резултатите, списък на използваната литература и приложения. Използваната литература съдържа 45 заглавия. Общият обем на дисертационния труд е 83 страници.

Номерациите на теоремите, твърденията и формулите, както и цитиранията в автореферата съвпадат със съответните номерации, формули и цитирания в дисертационния труд.

Публичната защита е насрочена на 29.08.2016 г. от 14 часа в зала 219 корпус 1 на Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“ на открито заседание на научното жури.

Съдържание

Увод

През 1918 г., Еми Ньотер публикува една от най-значимите си статии [No], в която формулира *обратната задача в теорията на Галоа.* Вместо определянето на групата на Галоа от трансформации на дадено поле и неговото разширение, Ньотер задава въпроса дали, за дадено поле и група, винаги е възможно да се намери разширение на полето, което има дадената група като група на Галоа.

Крайното разширение K/k наричаме *нормално* (или *разширение на Галоа*), ако k е неподвижно подполе на някоя група $G \leq \mathrm{Aut}(K)$. Групата G се нарича група на Галоа на разширението K/k, която ще означаваме с $\mathrm{Gal}(K/k)$.

Тази дефиниция включва изискването за сепарабелност, тъй като едно разширение K/k е нормално тогава и само тогава, когато е поле на разлагане на някакъв сепарабелен полином $p(x) \in k[x]$ (виж [МЗ, Гл. V, Теорема 5]). Ние ще използваме предимно термина "разширение на Галоа", тъй като много автори дефинират нормално разширение като поле на разлагане на полином, който не е непременно сепарабелен, а разширение на Галоа като нормално и сепарабелно разширение.

Нека G е крайна група и нека K е поле. **Обратната задача** в теорията на Галоа се състои от две части:

I Съществуване. Да се определи дали съществува разширение на Галоа M/K такова, че групата на Галоа $\mathrm{Gal}(M/K)$ е изоморфна на G.

II Явна конструкция. Ако G се реализира като група на Галоа над K, да се конструират в явен вид разширения на Галоа или полиноми над K, притежаващи G като група на Галоа.

Класическата обратна задача в теорията на Галоа е всъщност частта за съществуване за полето $K = \mathbb{Q}$ на рационалните числа. Въпросът дали всички крайни групи могат да се реализират над $\mathbb{Q}$ е един от най-предизвикателните проблеми в математиката, който все още не е решен. В тази връзка, съществува една интересна версия на обратната задача, която касае регулярните разширения: Нека $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ са независими променливи. Крайното разширение на Галоа $\mathbb{M}/\mathbb{Q}(\mathbf{t})$ тогава се нарича *регулярно*, ако $\mathbb{Q}$ е относително алгебрично затворено в $\mathbb{M}$, т.е. всеки елемент в $\mathbb{M} \setminus \mathbb{Q}$ е трансцедентен над $\mathbb{Q}$.

Регулярната обратна задача се състои в следното: Дали всяка крайна група се реализира като група на Галоа на регулярно разширение на $\mathbb{Q}(\mathbf{t})$? Когато имаме регулярно разширение на Галоа $\mathbb{M}/\mathbb{Q}(\mathbf{t})$, според теоремата на Хилберт за неразложимостта следва, че съществува "специализирано" разширение $M/\mathbb{Q}$ със същата група на Галоа. Нещо повече, такива специализирани разширения M/K съществуват за всяко Хилбертово поле с характеристика 0.

Изброените по-горе обратни задачи са получили положителен отговор в някои частни случаи, например:

1. Ако $K = \mathbb{C}(t)$, където t е променлива, всяка крайна група G се реализира като група на Галоа над K.

Това следва принципно от теоремата за съществуване на Риман. По-общо, абсолютната група на Галоа на функционалното поле $K(t)$ е свободна про-крайна група с безброй пораждащи, когато K е алгебрично затворено, виж [Har].

2. Ако $K = \mathbb{F}_q$ е крайно поле, групата на Галоа на всеки полином над K е циклична.

3. Ако K е $\mathfrak{p}$-адично поле, всеки полином над K е разрешим.

Има няколко монографии, адресиращи споменатите обратни задачи, които съдържат обширен обзор, виж например [MM, Vö, Se, JLY].

В началото на 19 век е получен следния резултат, чието доказателство може да бъде намерено в повечето книги посветени на теорията на полета от класове:

Теорема 1.(Кронекер-Вебер) *Всяка крайна абелова група G се явява група на Галоа над $\mathbb{Q}$. Нещо повече, G може да се реализира като група на Галоа на подполе на циклотомното поле $\mathbb{Q}(\zeta)$, където ζ е n-ти корен на единицата за някое естествено число n.*

Първото систематично изучаване на обратната задача в теорията на Галоа е започнато от Хилберт през 1892 г. Той използва своята теорема за неразложимост за да докаже следния резултат:

Теорема 2. *За всяко $n \geq 1$, симетричната група S_n и алтернативната група A_n се явяват групи на Галоа над $\mathbb{Q}$.*

Първите явни примери на полиноми притежаващи алтернативната група A_n като група на Галоа се дават от Шур [Schur] през 1930 г.

В споменатата в началото статия от 1918 г., Еми Ньотер [No] повдига също така и следния въпрос:

НЬОТЕРОВАТА ЗАДАЧА. *Нека* $M = \mathbb{Q}(t_1, \ldots, t_n)$ *е полето от рационални функции на* n *променливи. Симетричната група* S_n *от ред* n *действа върху* M *чрез пермутиране на променливите. Нека* G *е транзитивна подгрупа на* S_n *и нека* $K = M^G$ *е подполето на* G*-неподвижните рационални функции на* M*. Дали* K *е рационално разширение на* $\mathbb{Q}$*? Т.е. дали* K *е изоморфно на поле от рационални функции над* $\mathbb{Q}$*?*

Ако ньотеровата задача има положителен отговор, то G може да се реализира като група на Галоа над $\mathbb{Q}$ и даже над всяко хилбертово поле с характеристика 0. По подобие на обратната задача, може да обобщим и ньотеровата задача над произволно поле K. Тогава, ако ньотеровата задача има положителен отговор за дадена група, може да се построи семейство от параметрични разширения над K (или еквивалентно, да се построят пораждащи параметрични полиноми), които реализират G по такъв начин, че при произволен набор на параметрите винаги да получаваме G-разширения.

Ако пренесем разглежданията над произволно поле K, ньотеровата задача се състои в определянето дали неподвижното поле на подгрупата G на пермутационната група S_n действаща на функционалното поле $K(x_1, \ldots, x_n)$ винаги е чисто трансцендентно разширение на полето K. Разширението L на полето K е чисто трансцендентно (или рационално) над K, ако $L \simeq K(x_1, \ldots, x_n)$ над K за някое цяло число n, където $x_1, \ldots, x_n$ са алгебрично независими над K.

Пример 3. Симетричната група S_n действа на функционалното поле $K(x_1, \dots, x_n)$, и инвариантните функции са симетричните функции. Според основната теорема за симетричните полиноми:

$$K(x_1, \dots, x_n)^{S_n} = K(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

Елементарните симетрични полиноми са алгебрично независими над K, следователно $K(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ е чисто трасцендентно над K, т.е. ньотеровата задача има положителен отговор за S_n над всяко поле K.

От друга страна, известно е, че отговорът е "не" за някои групи G, дори за алгебрично затворено поле K. За повечето групи G, като например алтернативните групи A_n при $n > 5$, проблемът остава отворен за всяко K. По-общата версия на ньотеровата задача пита, в терминологията на Сер [GMS, 33.1], дали следните свойства са изпълнени:

Noe(G/K): Нека K е поле, G е крайна група и V е точно представяне на G над K. Тогава има естествено действие на G върху полето от рационални функции $K(V)$. *Задачата за рационалност* (която съвпада с ньотеровата задача, когато G действа на V чрез пермутиране) тогава се състои в това дали полето от G-неподвижните функции $K(V)^G$ е рационално (т.е. чисто трансцендентно) над K.

Обикновено, ньотеровата задача се формулира по този начин: Нека G е крайна група и G действа на рационалното функционално поле $K(x(g) : g \in G)$ чрез K автоморфизми дефинирани чрез $g \cdot x(h) = x(gh)$ за произволни $g, h \in G$. Да означим с $K(G)$ неподвижното поле $K(x(g) : g \in G)^G$. *Ньотеровата задача* се състои в определянето дали $K(G)$ е рационално над K.

Ньотеровата задача за абелови групи е широко изследвана от Суон, Воскресенски, Ендо, Мията, Ленстра и други. За проучване на този проблем предлагаме статията на Суон [Sw]. Теоремата на Фишер е отправна точка за изследване на ньотеровата задача за крайни абелови групи.

Теорема 4. (Фишер [Sw, Теорема 6.1]) *Нека G е крайна абелова група с експонента e. Да предположим, че* (i) *или* $char\ K = 0$ *или* $char\ K > 0$ *с* $char\ K \nmid e$, *и* (ii) *K съдържа примитивен e-ти корен на единицата. Тогава $K(G)$ е рационално над K.*

Пример 5. Цикличната група $C_2 = \{1, g\}$ действа на функционалното поле $K(x_1, x_g)$ чрез $g : x_1 \mapsto x_g \mapsto x_1$. Дефинираме $y_1 = x_1 + x_g, y_2 = x_1 - x_g$. Имаме, че $K(x_1, x_g) = K(y_1, y_2)$ и $g : y_1 \mapsto y_1, y_2 \mapsto -y_2$. Лесно е да се види сега, че $K(x_1, x_g)^{C_2} = K(y_1, y_2)^{C_2} = K(y_1, y_2^2)$ е рационално над K.

Що се отнася до неабеловите групи, тук липсва общ резултат подобен на теоремата на Фишер. През последните години се работи много активно в тази насока от редица учени от цял свят като М. Канг, А. Хоши и много други. Нашата цел е да допринесем за развитето на ньотеровата задача в неабеловия случай.

Обзор на дисертацията

В първа глава са формулирани основните цели и резултати на дисертационния труд.

Определение 1.1.1. Нека K е произволно поле. Разширението L на полето K се нарича рационално над K (или за по-кратко, K-рационално), ако $L \simeq K(x_1, \ldots, x_n)$ над K за някое цяло число n, където $x_1, \ldots, x_n$ са алгебрично независими над K.

Нека G е крайна група. Нека G действа на рационалното функционално поле $K(x(g) : g \in G)$ чрез K автоморфизми дефинирани чрез $g \cdot x(h) = x(gh)$ за произволни $g, h \in G$. Означаваме с $K(G)$ неподвижното подполе $K(x(g) : g \in G)^G$. *Ньотеровата задача* се състои в това дали $K(G)$ е рационално над K. Това е свързано с обратната задача на Галоа, за съществуването на пораждащи G-разширения на Галоа над K, и съществуването на версални G-торсори над K-рационални разширения на полета [Sw, Sa1], [GMS, 33.1, p.86].

Отправна точка за изследване на ньотеровата задача за крайни абелови групи е теоремата на Фишер.

Теорема 1.1.2. (Фишер [Sw, Теорема 6.1]) *Нека G е крайна абелова група с експонента e. Да предположим, че* (i) *или $char\, K = 0$ или $char\, K > 0$ с $char\, K \nmid e$, и* (ii) *K съдържа примитивен e-ти корен на единицата. Тогава $K(G)$ е рационално над K.*

Следващият етап е изследването на ньотеровата задача за крайни метаабелови групи и в частност метациклични p-групи.

Определение 1.1.3. Групата G се нарича метациклична p-група, ако G се поражда от два елемента σ и τ със съотношения $\sigma^{p^a} = 1, \tau^{p^b} = \sigma^{p^c}$ и $\tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{\varepsilon+\delta p^r}$, където $\varepsilon = 1$ ако p е нечетно, $\varepsilon = \pm 1$ ако $p = 2$, $\delta = 0, 1$ и $a, b, c, r \geq 0$ са подложени на някои ограничения.

Описание на тези ограничения може да се види в [Ka1, p. 564]. Следната теорема на Канг обобщава теоремата на Фишер за метацикличните p-групи.

Теорема 1.1.4. (Канг [Ka1, Теорема 1.5]) *Нека G е метациклична p-група с експонента p^e и нека K е произволно поле такова, че* (i) *$char\, K = p$, или* (ii) *$char\, K \neq p$ и K съдържа примитивен p^e-ти корен на единицата. Тогава $K(G)$ е рационално разширение на K.*

Други резултати за ньотеровата задача за p-групи могат да се намерят в [CK, HuK, Ka2]. Все още е открит въпросът дали по-горния резултат може да бъде обобщен за всички серии от p-групи с два пораждащи елемента или мета-абелови групи, които имат фактор групи изоморфни на метациклични p-групи. Въпреки това, ние не трябва да "свръх-генерализираме" теорема 1.1.4., защото Солтман доказва следния резултат.

Теорема 1.1.5. (Солтман [Sa2]) *За всяко просто число p и за всяко поле K със $\mathrm{char}\, K \neq p$ (в часност, K може да бъде алгебрично затворено поле), съществува мета-абелова p-група G от ред p^9 такава, че $K(G)$ не е рационално над K.*

Една от основните ни цели е да докажем резултат подобен на теорема 1.1.4. за всички централни p-разширения на общата метациклична p-група. Разбира се, някои допълнителни условия за параметрите на групата G се появят във формулировките на нашите резултати, така че да гарантираме съществуването на групите, които изследваме.

Започваме с централните разширения на бицикличните групи.

Определение 1.1.6. Една група се нарича *бициклична*, ако тя е директно произведение на две циклични групи, т.е. тя е абелова метациклична група.

Нашият първи основен резултат, който е доказан в параграф 2.2 е следната

Теорема 1.1.7. *Нека G е бициклична p-група породена* *от два елемента* σ *и* τ *със съотношения* $\sigma^{p^a} = 1, \tau^{p^b} = 1$ *и* $\tau^{-1}\sigma\tau = \sigma$*. Да предположим, че* $\widetilde{G}$ *е централно разширение на* G*, т.е. имаме следното групово разширение*

$$1 \longrightarrow C \longrightarrow \widetilde{G} \longrightarrow G \cong C_{p^a} \times C_{p^b} \longrightarrow 1,$$

където $C \leq Z(\widetilde{G})$*. Нека* p^t *е експонентата на* C*, нека* $a \geq b \geq t$ *и нека про-образът на* $[\sigma, \tau] = \sigma^{-1}\tau^{-1}\sigma\tau$ *в* $\widetilde{G}$ *е от ред* p^t*. Нека* $e = \max\{a, 2t\}$*. Да предположим, че* (i) $charK = p$ *или* (ii) $charK \neq p$*,* K *е безкрайно и* K *съдържа примитивен* p^e*-ти корен на единицата. Тогава* $K(\widetilde{G})$ *е рационално над* K*.*

След това, разглеждаме случая, когато G е неабелова метациклична p-група. Вторият основен резултат, който доказваме в параграф 2.3 е следната теорема, която се отнася до циклични централни разширения на G.

Теорема 1.1.8. *Нека* G *е неабелова метациклична* p*-група породена от два елемента* σ *и* τ *със съотношения* $\sigma^{p^a} = 1, \tau^{p^b} = \sigma^{p^c}$ *и* $\tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{\varepsilon+p^r}$*, където* $1 \leq c \leq a, r \leq \min\{b, c\}$*;* $\varepsilon = 1$ *ако* p *е нечетно и* $\varepsilon = \pm 1$ *ако* $p = 2$*. Да предположим, че* $\widetilde{G}$ *е централно разширение на групата* G *чрез цикличната група* C_{p^t}*, т.е. имаме следното групово разширение*

$$1 \longrightarrow C_{p^t} \longrightarrow \widetilde{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1,$$

където $C_{p^t} \leq Z(\widetilde{G})$*. Нека* $a \geq t, b \geq t$ *и нека про-образът на* $\sigma^{-(k-1)}[\sigma, \tau] = \sigma^{-k}\tau^{-1}\sigma\tau$ *в* $\widetilde{G}$ *е от ред* p^t*. Нека* $p^m = \exp(\widetilde{G})$

и $e = \max\{m, r+t\}$. *Да предположим, че* (i) $charK = p$ *или* (ii) $charK \neq p$, *K е безкрайно и K съдържа примитивен* p^e*-ти корен на единицата. Тогава* $K(\widetilde{G})$ *е рационално над* K.

Обобщаваме теорема 1.1.8. за всички централни разширения (т.е. ядрото е произволна абелова група), за сметка обаче, на по-силни изисквания за корените на единицата и доказваме в параграф 2.4 следното

Следствие 1.1.9. *Нека G е неабелова метациклична p-група породена от два елемента σ и τ със съотношения* $\sigma^{p^a} = 1, \tau^{p^b} = \sigma^{p^c}$ *и* $\tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{\varepsilon+p^r}$, *където* $\varepsilon = 1$ *ако p е нечетно и* $\varepsilon = \pm 1$ *ако* $p = 2$. *Да предположим, че* $\widetilde{G}$ *е централно разширение на групата G, т.е. имаме следното групово разширение*

$$1 \longrightarrow C \longrightarrow \widetilde{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1,$$

където $C \leq Z(\widetilde{G})$. *Нека* p^t *е експонентата на C, нека* $a \geq t, b \geq t$ *и нека про-образът на* $\sigma^{-(k-1)}[\sigma, \tau] = \sigma^{-k}\tau^{-1}\sigma\tau$ *в* $\widetilde{G}$ *е от ред* p^t. *Нека* $e = a + b + t - c$. *Да предположим, че* (i) $charK = p$ *или* (ii) $charK \neq p$, *K е безкрайно и K съдържа примитивен* p^e*-ти корен на единицата. Тогава* $K(\widetilde{G})$ *е рационално над* K.

Предположението относно наличието на определени корени на единицата винаги е възниквало сред известните резултати за ньотеровата задача. В действителност, дори когато G е неабелова p-група от ред p^3, където p е нечетно просто число, то не е известно как да се намери необходимо и достатъчно условие такова, че $\mathbb{Q}(G)$ да е рационално над $\mathbb{Q}$ (виж [Ka3]). Подобна е и ситуацията за абеловите групи. Например, ако G е циклична група от ред $47, 113$ или 233, то $\mathbb{Q}(G)$ не е рационално над $\mathbb{Q}$ (Суон [Sw]). Затова е желателно да отслабим възможно най-много изискванията за съществуване на корени на единицата.

Ако $r \geq t$, сме в състояние да отслабим условието за корените на единицата в теорема 1.1.8. и в параграф 2.4 е доказана следната

Теорема 1.1.10. *Нека G е неабелова метациклична p-група породена от два елемента σ и τ със съотношения $\sigma^{p^a} = 1, \tau^{p^b} = \sigma^{p^c}$ и $\tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{\varepsilon+p^r}$, където $1 \leq c \leq a, r \leq \min\{b, c\}$; $\varepsilon = 1$ ако p е нечетно число и $\varepsilon = \pm 1$ ако $p = 2$. Да предположим, че $\widetilde{G}$ е централно разширение на групата G чрез цикличната група C_{p^t}, т.е. имаме следното групово разширение*

$$1 \longrightarrow C_{p^t} \longrightarrow \widetilde{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1,$$

където $C_{p^t} \leq Z(\widetilde{G})$. Нека $t \leq r$ и нека про-образът на $\sigma^{-(k-1)}[\sigma, \tau] = \sigma^{-k}\tau^{-1}\sigma\tau$ в $\widetilde{G}$ е от ред p^t. Нека $p^m = \exp(\widetilde{G})$. Да предположим, че (i) $charK = p$ или (ii) $charK \neq p$, K е безкрайно и K съдържа примитивен p^m-ти корен на единицата. Тогава $K(\widetilde{G})$ е рационално над K.

Ключовата идея за доказване на нашите основни резултати е да се намери точно G-подпространство W (т.е. хомоморфизма на представянето е инективен) на регулярното пространство на представяне $\bigoplus_{g \in G} K \cdot x(g)$ и да покажем, че W^G е рационално над K. Подпространството W се получава като индуцирано представяне от абелова подргупа H. Чрез прилагането на различни линеаризиращи техники, ние редуцираме задачата за рационалността до друга задача за рационалност, която е свързана или с циклични или метациклични действия. Последните действия могат да бъдат линеаризирани с помощта на лема 1.2.8. или теорема 1.2.9.

Общовалидни означения. Разширението L на полето K е рационално над K, ако L е чисто трансцендентно над K. Да припомним, че с $K(G)$ означаваме $K(x(g) : g \in G)^G$, където $g \cdot x(h) = x(gh)$ за произволни $g, h \in G$. Групата G се нарича метациклична, ако G може да се породи от два елемента σ и τ, и една от тези пораждащи е нормална подгрупа на G. Абеловата метациклична група се нарича бициклична. Експонентата на крайната група G е $\operatorname{lcm}\{\operatorname{ord}(g) : g \in G\}$, където $\operatorname{ord}(g)$ е редът на g. Две разширения L_1 и L_2 на полето K с G-действие са G-изоморфни, ако съществува изоморфизъм $\varphi : L_1 \to L_2$ над K такъв, че $\varphi(\sigma \cdot u) = \sigma \cdot \varphi(u)$ за всяко $\sigma \in G$ и всяко $u \in L_1$.

В параграф 1.2 включваме няколко предварителни резултата, получени през последните двадесет години, които използваме по-нататък.

Теорема 1.2.1. ([HK, Теорема 1]) *Нека G е крайна група действаща на полето $L(x_1, \dots, x_m)$, от рационални функции на m променливи над полето L, така че*

(i) *за всяко $\sigma \in G, \sigma(L) \subset L$;*

(ii) *ограничението на действието на G върху L е точно;*

(iii) *за всяко $\sigma \in G$,*

$$\begin{pmatrix} \sigma(x_1) \\ \vdots \\ \sigma(x_m) \end{pmatrix} = A(\sigma) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + B(\sigma)$$

където $A(\sigma) \in \mathrm{GL}_m(L)$ и $B(\sigma)$ е $m \times 1$ матрица над L. Тогава съществуват $z_1, \dots, z_m \in L(x_1, \dots, x_m)$ такива, че $L(x_1, \dots, x_m)^G = L^G(z_1, \dots, z_m)$ и $\sigma(z_i) = z_i$ за всяко $\sigma \in G$ и за всяко $1 \le i \le m$.

Теорема 1.2.2.([AHK, Теорема 3.1]) *Нека G е крайна група действаща на $L(x)$, полето от рационални функции на една променлива над поле L. Да предположим, че за всяко $\sigma \in G, \sigma(L) \subset L$ и $\sigma(x) = a_\sigma x + b_\sigma$ за всяко $a_\sigma, b_\sigma \in L$ с $a_\sigma \neq 0$. Тогава $L(x)^G = L^G(z)$ за някое $z \in L[x]$.*

Теорема 1.2.3. (Куниоши [CK, Теорема 1.7], Гашуц [Ga]) *Ако $charK = p > 0$ и G е крайна p-група, тогава $K(G)$ е рационално над K.*

Да означим с $\mathrm{Br}(K)$ групата на Брауер на полето K и с $\mathrm{Br}_N(K)$ нейната N-торзия за произволно $N > 1$. Следвайки Рокет [Ro], ако $\gamma = [B] \in \mathrm{Br}(K)$ е класа на K-централна проста алгебра B и $m \geq 1$ е кратно на индекса на B, тогава с $K_m(\gamma)$ ще означаваме m-тото поле на Брауер на γ. Нещо повече, $K_m(\gamma)/K$ е регулярно разширение от степен на трансцендентост $m-1$, което е рационално тогава и само тогава, когато класът γ е тривиален. Следната теорема в същността си е получена от Солтман в [Sa3, p. 541] през 1990 г. и доказана в детайли от Б. Планс през 2009 г. [Pl, Твърдение 7].

Теорема 1.2.4. (Солтман [Pl, Твърдение 7]) *Нека* $1 \to C \to H \to G \to 1$ *е централно групово разширение, представено с елемента* $\varepsilon \in H^2(G, C)$. *Нека* K *е безкрайно поле и да означим с* N *експонентата на* C. *Да предположим, че* N *е взаимно просто с характеристиката на* K *и че* K *съдържа* μ_N *- групата от* N*-тите корени на единицата. Нека* $C \cong \mu_{N_1} \times \cdots \times \mu_{N_r}$ *и нека съответният изоморфизъм* $H^2(G, C) \cong \oplus_i H^2(G, \mu_{N_i})$ *изобразява* ε *в* $(\varepsilon)_i$. *Нека също е дадено подпредставяне* V *на регулярното представяне на* G *над* K *и нека* $\gamma_i \in \mathrm{Br}_N(K(V)^G) \subset \mathrm{Br}(K(V)^G)$ *е инфлацията на* ε_i *по отношение на изоморфизма* $G \cong \mathrm{Gal}(K(V)/K(V)^G)$. *Ако означим* $F = K(V)^G$, *то* $K(H)$ *е рационално над* $F-$ *свободния композит* $F_m(\gamma_1) \cdots F_m(\gamma_r)$, *където* m *е реда на* G.

Следващият ключов результат е доказан от Планс през 2009 г.

Теорема 1.2.5.(Планс [Pl, Твърдение 9]). *Нека* $1 \to C \to H \to G \to 1$ *е централно разширение на крайни групи. Нека* $M(G)$ *е множителя на Шур за* G*. Нека* G' *(съответно* H'*) е комутаторната подгрупа на* G *(съответно* H*) и нека с* N *(съответно* e*) означим експонентата на* C *(съответно* G/G'*). Нека* K *е безкрайно поле съдържащо* eN*-тите корени на единицата.*

(a) *Ако* $H' \cap C = \{1\}$*, тогава* $K(H)$ *е рационално над* $K(G)$*.*

(b) *Ако* $H' \cap C \neq \{1\}$ *и* $M(G) \cong Z/pZ$ *за някое просто число* p*, тогава* $K(H)$ *е рационално над* $K(\widetilde{G})$ *за всяка група на представяне* $\widetilde{G}$ *на* G*.*

Ние доказваме малко по-оптимизирана версия на този результат, следвайки по-различен подход, което ни позволява да отслабим условието за корените на единицата.

Теорема 1.2.6. *Нека* $1 \to C \to H \to G \to 1$ *е централно разширение на крайни* p*-групи за простото число* p*. Нека* G' *(съответно* H'*) е комутаторната подгрупа на* G *(съответно* H*) и нека с* p^n *(съответно* p^e*) означим експонентата на* C *(съответно* G/G'*). Да предположим, че* $H' \cap C = \{1\}$*.*

(i) *Нека* $C = \mu_{p^n}$ *и да положим* $m = \max\{i : \mu_{p^i} \cap \mu_{p^n} \neq \{1\}, \mu_{p^i} \leq H/H'\}$*. Нека* K *е безкрайно поле съдър-*

жащо p^m-тите корени на единицата. Тогава $K(H)$ е рационално над $K(G)$.

(ii) *Нека K е безкрайно поле съдържащо p^{n+e}-тите корени на единицата. Тогава $K(H)$ е рационално над $K(G)$.*

Теорема 1.2.7.([Ha1, Ha2])*Нека K е произволно поле и G е крайна подгрупа на $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$. Тогава неподвижното поле $K(x,y)^G$ под мономиално действие на G е рационално над K.*

Следната лема може да се извади от някои доказателства в [Ka2, HuK].

Лема 1.2.8. (Канг) *Нека $\langle\tau\rangle$ е циклична група от ред $n>1$, действаща на полето $K(v_1,\dots,v_{n-1})$, от рационалните функции на $n-1$ променливи над поле K, така*

$$\tau \quad : \quad v_1 \mapsto v_2 \mapsto \cdots \mapsto v_{n-1} \mapsto (v_1 \cdots v_{n-1})^{-1} \mapsto v_1.$$

Ако K съдържа примитивен n-ти корен на единицата ξ, тогава $K(v_1,\dots,v_{n-1}) = K(s_1,\dots,s_{n-1})$, където $\tau : s_i \mapsto \xi^i s_i$ за $1 \le i \le n-1$.

Сега, нека G е произволна метациклична p-група породена от два елемента σ и τ със съотношения $\sigma^{p^a}=1, \tau^{p^b}=\sigma^{p^c}$ и $\tau^{-1}\sigma\tau=\sigma^{\varepsilon+\delta p^r}$, където $\varepsilon=1$ ако p е нечетно, $\varepsilon=\pm1$ ако $p=2$, $\delta=0,1$ и $a,b,c,r\ge0$ са подложени на някои ограничения. За описанието на тези ограничения виж например [Ka1, p. 564].

Теорема 1.2.9. (Канг [Ka1, Теорема 4.1]) *Нека p е прос-*

то число, m, n и r са положителни цели числа, $k = 1 + p^r$ ако $(p, r) \neq (2, 1)$ (съответно $k = -1 + 2^r$ при $r \geq 2$). Нека G е разцепима метациклична p-група от ред p^{m+n} и експонента p^e, зададена по следния начин $G = \langle \sigma, \tau : \sigma^{p^m} = \tau^{p^n} = 1, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^k \rangle$. Нека K е произволно поле такова, че $\mathrm{char} K \neq p$ и K съдържа примитивен p^e-ти корен на единицата, и нека ζ е примитивен p^m-ти корен на единицата. Тогава $K(x_0, x_1, \ldots, x_{p^n-1})^G$ е рационално над K, където G действа на $x_0, \ldots, x_{p^n-1}$ по следния начин

$$\begin{aligned} \sigma &: x_i \mapsto \zeta^{k^i} x_i, \\ \tau &: x_0 \mapsto x_1 \mapsto \cdots \mapsto x_{p^n-1} \mapsto x_0. \end{aligned}$$

Втора глава е посветена на ньотеровата задача за централни разширения на метациклични p-групи. В нея са доказани основните резултати формулирани в първа глава. В параграф 2.1 е направено описание на централните циклични разширения на метациклични p-групи.

Първо разглеждаме централните разширения на бицикличните p-групи. Нека G е бициклична p-група породена от два елемента σ и τ със съотношения $\sigma^{p^a} = \tau^{p^b} = 1$ и $\tau^{-1}\sigma\tau = \sigma$. Нека $\widetilde{G}$ е централно циклично разширение на G чрез C_{p^t} такова, че про-образът на $[\sigma, \tau] = \sigma^{-1}\tau^{-1}\sigma\tau$ в $\widetilde{G}$ е от ред p^t. Тогава имаме груповото разширение

$$1 \longrightarrow C_{p^t} \longrightarrow \widetilde{G} \longrightarrow G \cong C_{p^a} \times C_{p^b} \longrightarrow 1, \tag{2.1}$$

където $C_{p^t} = \langle \rho \rangle \leq Z(\widetilde{G}), t \leq b \leq a$ и про-образът на $[\sigma, \tau] = \sigma^{-1}\tau^{-1}\sigma\tau$ в $\widetilde{G}$ е от ред p^t. Ако положим $|\widetilde{G}| = p^n$, получаваме $n = a + b + t$. Според [AMM] всяка група от ред p^n с 2 пораждащи и клас на нилпотентност 2 е централно разширение от вида (2.1). Освен това, за всяко положителено разлагане (a, b, t) на n, множеството от неизоморфните централни разширения от вида (2.1) с клас на нилпотентност точно 2 е непразно [AMM, Лема 2.2].[1mm] Тогава, всяка група $\widetilde{G}$ има представянето:

$$\widetilde{G} = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{p^a} = \rho^{ip^\alpha}, \tau^{p^b} = \rho^{jp^\beta}, \rho^{p^t} = 1, [\sigma, \tau] = \rho^l,$$

ρ е централен$\rangle$, където i, j, l са цели положитени числа, $0 \leq i, j, l < p^t$, $\gcd(ijl, p) = 1, 0 \leq \alpha, \beta \leq t; a \geq b \geq t \geq 1$ и $a + b + t = n$. Да отбележим, че комутаторната подгрупа $\widetilde{G}'$ е циклична и е породена от ρ^l.

Бейкън и Капе [BK] през 1993 г. дават класификация на тези групи, но с някои пропуски, които са коригирани в [AMM] през 2012 г. Ние не се нуждаем от пълна класификация за нашите цели, така че няма да дадем тази класификация в нашата работа. Вместо това, ще напишем следния резултат от [AMM], който дава по-удобна форма на горното представяне.

Твърдение 2.1.1. ([AMM, Твърдение 3.1]) *Да фиксираме $a \geq b \geq t \geq 1$, нека $0 \leq \alpha, \beta \leq t$ и нека i, j, l са цели положителни числа, $0 \leq i, j, l < p^t$, с $\gcd(ijl, p) = 1$. Тогава* *групите*

$\widetilde{G} = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{p^a} = \rho^{ip^\alpha}, \tau^{p^b} = \rho^{jp^\beta}, \rho^{p^t} = 1, [\sigma, \tau] = \rho^l,$

ρ *е централен*$\rangle$ *и*

$\widetilde{H} = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{p^a} = \rho^{p^\alpha}, \tau^{p^b} = \rho^{p^\beta}, \rho^{p^t} = 1, [\sigma, \tau] = \rho,$

ρ *е централен*$\rangle$ *са изоморфни.*

Сега, нека G е произволна неабелова метациклична p-група породена от два елемента σ и τ, такива че $\sigma^{p^a} = 1, \tau^{p^b} = \sigma^{p^c}$ и $\tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^k$ за $k = \varepsilon + p^r$, където $\varepsilon = 1$ ако p е нечетно, $\varepsilon = \pm 1$ ако $p = 2$, и $a, b, c, r \geq 0$ са обект на някои ограничения. Например, ние имаме $a, b, c \geq r$. Описанието на тези ограничения може да се види например в [Ka1, p. 564].

Нека t е цяло положително число такова, че $t \leq \min\{a, b\}$ и нека $\widetilde{G}$ е централно циклично разширение на неабелова метациклична p-група G чрез C_{p^t} такова, че праобразът на $\sigma^{-(k-1)}[\sigma, \tau] = \sigma^{-k}\tau^{-1}\sigma\tau$ в $\widetilde{G}$ е от ред p^t. Тогава имаме груповото разширение

$$1 \longrightarrow C_{p^t} \longrightarrow \widetilde{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1, \tag{2.2}$$

където $C_{p^t} = \langle \rho \rangle \leq Z(\widetilde{G})$.
Групата $\widetilde{G}$ тогава има следното представяне :

$\widetilde{G} = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{p^a} = \rho^{ip^\alpha}, \tau^{p^b} = \sigma^{p^c}\rho^{jp^\beta}, \rho^{p^t} = 1, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^k\rho^l,$

ρ е централен$\rangle$, където i, j, l са цели положителни числа, $0 \leq i, j, l < p^t$, $\gcd(ijl, p) = 1, 0 \leq \alpha, \beta \leq t$ и $k = \varepsilon + p^r$.

Доказваме следното

Твърдение 2.1.2. *Да фиксираме* $a \geq t, b \geq t, 0 \leq c \leq a, r \leq \min\{a,b,c\}$. *Нека* $0 \leq \alpha, \beta \leq t$ *и нека* i, j, l *са цели положителни числа,* $0 \leq i, j, l < p^t$, *с* $\gcd(ijl, p) = 1$. *Тогава съществуват цели положителни числа* $m, n : 0 < m < p^a, 0 < n < p^t, \gcd(mn, p) = 1$ *такива, че групата*

$\widetilde{G} = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{p^a} = \rho^{ip^\alpha}, \tau^{p^b} = \sigma^{p^c}\rho^{jp^\beta}, \rho^{p^t} = 1, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^k\rho^l,$

ρ *е централен*$\rangle$ *е изоморфна на групата*

(2.3) $\widetilde{H} = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{p^a} = \rho^{np^\alpha}, \tau^{p^b} = \sigma^{mp^c}\rho^{p^\beta}, \rho^{p^t} = 1, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^k\rho, \rho$ *е централен*$\rangle$.

В параграф 2.1 е доказано и

Твърдение 2.1.3. *Нека групата* $\widetilde{G}$ *е изоморфна на групата* $\widetilde{H}$ *с представяне от вида (2.3). Комутаторната подгрупа* $\widetilde{H}'$ *е циклична и се поражда от* $\sigma^{k-1}\rho$.

В доказателството на теорема 1.1.8., разглеждаме различни случаи, които се появяват в зависимост от стойностите на α, β, c и ε. А именно, групата $\widetilde{G}$ е изоморфна на една от следните 16 групи.

1. $\varepsilon = 1, c = a, \alpha = \beta = t$
   $G_1 = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{p^a} = \tau^{p^b} = \rho^{p^t} = 1, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{1+p^r}\rho \rangle$,

2. $\varepsilon = 1, c = a, \alpha = t, \beta < t$
   $G_2 = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{p^a} = \rho^{p^t} = 1, \tau^{p^b} = \rho^{p^\beta}, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{1+p^r}\rho \rangle$,

3. $\varepsilon = 1, c = a, \alpha < t, \beta = t$
   $G_3 = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{p^a} = \rho^{p^\alpha}, \tau^{p^b} = \rho^{p^t} = 1, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{1+p^r}\rho \rangle,$

4. $\varepsilon = 1, c = a, \alpha < t, \beta < t$
   $G_4 = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{p^a} = \rho^{p^\alpha}, \tau^{p^b} = \rho^{p^\beta}, \rho^{p^t} = 1, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{1+p^r}\rho \rangle,$

5. $\varepsilon = -1, c = a, \alpha = \beta = t$
   $G_5 = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{2^a} = \tau^{2^b} = \rho^{2^t} = 1, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{-1+2^r}\rho \rangle,$

6. $\varepsilon = -1, c = a, \alpha = t, \beta < t$
   $G_6 = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{2^a} = \rho^{2^t} = 1, \tau^{2^b} = \rho^{2^\beta}, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{-1+2^r}\rho \rangle,$

7. $\varepsilon = -1, c = a, \alpha < t, \beta = t$
   $G_7 = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{2^a} = \rho^{2^\alpha}, \tau^{2^b} = \rho^{2^t} = 1, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{-1+2^r}\rho \rangle,$

8. $\varepsilon = -1, c = a, \alpha < t, \beta < t$
   $G_8 = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{2^a} = \rho^{2^\alpha}, \tau^{2^b} = \rho^{2^\beta}, \rho^{2^t} = 1, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{-1+2^r}\rho \rangle,$

9. $\varepsilon = 1, c < a, \alpha = \beta = t$
   $G_9 = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{p^a} = \rho^{p^t} = 1, \tau^{p^b} = \sigma^{p^c}, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{1+p^r}\rho \rangle,$

10. $\varepsilon = 1, c < a, \alpha = t, \beta < t$
    $G_{10} = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{p^a} = \rho^{p^t} = 1, \tau^{p^b} = \sigma^{p^c}\rho^{p^\beta}, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{1+p^r}\rho \rangle,$

11. $\varepsilon = 1, c < a, \alpha < t, \beta = t$
$G_{11} = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{p^a} = \rho^{p^\alpha}, \tau^{p^b} = \sigma^{p^c}, \rho^{p^t} = 1, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{1+p^r}\rho \rangle,$

12. $\varepsilon = 1, c < a, \alpha < t, \beta < t$
$G_{12} = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{p^a} = \rho^{p^\alpha}, \tau^{p^b} = \sigma^{p^c}\rho^{p^\beta}, \rho^{p^t} = 1, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{1+p^r}\rho \rangle,$

13. $\varepsilon = -1, c < a, \alpha = \beta = t$
$G_{13} = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{2^a} = \rho^{2^t} = 1, \tau^{2^b} = \sigma^{2^c}, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{-1+2^r}\rho \rangle,$

14. $\varepsilon = -1, c < a, \alpha = t, \beta < t$
$G_{14} = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{2^a} = \rho^{2^t} = 1, \tau^{2^b} = \sigma^{2^c}\rho^{2^\beta}, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{-1+2^r}\rho \rangle,$

15. $\varepsilon = -1, c < a, \alpha < t, \beta = t$
$G_{15} = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{2^a} = \rho^{2^\alpha}, \tau^{2^b} = \sigma^{2^c}, \rho^{2^t} = 1, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{-1+2^r}\rho \rangle,$

16. $\varepsilon = -1, c < a, \alpha < t, \beta < t$
$G_{16} = \langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{2^a} = \rho^{2^\alpha}, \tau^{2^b} = \sigma^{2^c}\rho^{2^\beta}, \rho^{2^t} = 1, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{-1+2^r}\rho \rangle.$

Глава 3 е посветена на така наречените множители на Богомолов, които се явяват препятствия за ньотеровата задача. В параграф 3.1 включваме някои известни предварителни резултати, касаещи множителите на Богомолов.

Солтман поставя една задача, която е тясно свързана с ньотеровата задача и се състои в това дали $K(V)^G$ е стабилно рационално, т.е. дали съществуват независими променливи $x_1, \ldots, x_r$ такива, че $K(V)^G(x_1, \ldots, x_r)$ се превръща в чисто трансцендентно разширение на K. Ясно е, че ако $K(V)^G$ е рационално, то е и стабилно рационално над K. Обратното не винаги е вярно.

Солтман [Sa2], също така, намира примери за групи G от ред p^9 такива, че $\mathbb{C}(V)^G$ не е стабилно рационално над $\mathbb{C}$. Негов основен метод е прилагането на неразклонената кохомологична група $H^2_{nr}(\mathbb{C}(V)^G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ като препятствие. Богомолов [Bo] доказва, че $H^2_{nr}(\mathbb{C}(V)^G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ е канонично изоморфна на

$$B_0(G) = \bigcap_A \ker\{\mathrm{res}_G^A : H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^2(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\},$$

където A пробягва всички бициклични подгрупи на G (групата A се нарича бициклична, ако A е директно произведение на две циклични групи, като е допустимо едната да е единичната група, т.е. A да е циклична).

Определение 3.1.1. Групата $B_0(G)$ е подгрупа на множителя на Шур $H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, и Кунiявски [Ku] я нарича *множител на Богомолов* на G.

Солтман доказва, че ако ньотеровата задача има положителен отговор, то неразклонената кохомологична група е тривиална. Така тривиалността на множителя на Богомолов е препятствие за ньотеровата задача.

Определение 3.1.2. Нека G е група и $x, y \in G$. Да означим $x^y = y^{-1}xy$. Елементът $[x, y] = x^{-1}x^y = x^{-1}y^{-1}xy$ се нарича комутатор на x и y.

Може да дефинираме комутаторите от по-високо ниво по следния начин.

Определение 3.1.3. $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$ за $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$.

През 2012 година Моравец намира нов начин за представяне на множителя на Богомолов, като използва така наречения неабелов външен квадрат на G. Той е група породена от символите $x \wedge y$ $(x, y \in G)$, които се подчиняват на съотношенията

$$\begin{aligned} xy \wedge z &= (x^y \wedge z^y)(y \wedge z), \\ x \wedge yz &= (x \wedge z)(x^z \wedge y^z), \\ x \wedge x &= 1, \end{aligned}$$

за всяко $x, y, z \in G$. Да означим тази група с $G \wedge G$. Нека $[G, G]$ е комутаторната подгрупа на G. Да отбележим, че комутаторното изображение $\kappa : G \wedge G \to [G, G]$, зададено чрез $x \wedge y \mapsto [x, y]$ е добре дефиниран хомоморфизъм на групи. Нека с $M(G)$ да означим ядрото на κ и да означим с $M_0(G)$ подгрупата на $M(G)$ породена от всички $x \wedge y$

такива, че $x, y \in G$ комутират. Моравец доказва в [Mo1], че $B_0(G)$ е (не-канонично) изоморфна на факторгрупата $M(G)/M_0(G)$.

Има и алтернативен начин за получаване на неабелови външен квадрат $G \wedge G$. Нека φ е автоморфизъм на G и G^φ е изоморфно копие на G относно $\varphi : x \mapsto x^\varphi$. Да дефинираме $\tau(G)$, групата породена от G и G^φ, които се подчиняват на следните съотношения: $[x, y^\varphi]^z = [x^z, (y^z)^\varphi] = [x, y^\varphi]^{z^\varphi}$ и $[x, x^\varphi] = 1$ за всяко $x, y, z \in G$. Очевидно, групите G и G^φ могат да се разглеждат като подгрупи на $\tau(G)$. Нека $[G, G^\varphi] = \langle [x, y^\varphi] : x, y \in G \rangle$ е комутаторната подгрупа. Да отбележим, че изображението $\phi : G \wedge G \to [G, G^\varphi]$ зададено чрез $x \wedge y \mapsto [x, y^\varphi]$, всъщност е изоморфизъм на групи (виж [BM]).

Сега, нека $\kappa^* = \kappa \cdot \phi^{-1}$ е композицията от изображения от $[G, G^\varphi]$ в $[G, G]$, $M^*(G) = \ker \kappa^*$ и $M_0^*(G) = \phi(M_0(G))$. Тогава е ясно, че $B_0(G)$ е изоморфна на групата $M^*(G)/M_0^*(G)$ според [Mo1]. Да отбележим, че

$$M^*(G) = \left\{ \prod_{\text{крайно}} [x_i, y_i^\varphi]^{\varepsilon_i} \in [G, G^\varphi] : \varepsilon_i = \pm 1, \prod_{\text{крайно}} [x_i, y_i]^{\varepsilon_i} = 1 \right\}$$

и

$$M_0^*(G) = \left\{ \prod_{\text{крайно}} [x_i, y_i^\varphi]^{\varepsilon_i} \in [G, G^\varphi] : \varepsilon_i = \pm 1, [x_i, y_i] = 1 \right\}.$$

За да се докаже, че $B_0(G) = 0$ за дадена група G, е достатъчно да се покаже, че $M^*(G) = M_0^*(G)$. Това може да се постигне чрез намиране на пораждащото множество на $M^*(G)$ състоящо се само от елементи на $M_0^*(G)$.

Предимството от горното описание на $G \wedge G$ е способността да се използва мощния апарат на комутаторните пресмятания, вместо пресмятания с елементи от $G \wedge G$. Следните две леми обобщават редица свойства на $\tau(G)$ и $[G, G^\varphi]$, които използваме в доказателствата на нашите основни резултати.

Лема 3.1.4. ([BM]) *Нека G е група.*

1. $[x, yz] = [x, z][x, y][x, y, z]$ *и* $[xy, z] = [x, z][x, z, y][y, z]$ *за всяко* $x, y, z \in G$.

2. *Ако G е от клас на нилпотентност c, тогава $\tau(G)$ е от клас на нилпотентност най-много $c + 1$.*

3. *Ако G е от клас на нилпотентност ≤ 2, тогава $[G, G^\varphi]$ е абелова.*

4. $[x, y^\varphi] = [x^\varphi, y]$ *за всяко* $x, y \in G$.

5. $[x, y, z^\varphi] = [x, y^\varphi, z] = [x^\varphi, y, z] = [x^\varphi, y^\varphi, z] = [x^\varphi, y, z^\varphi] = [x, y^\varphi, z^\varphi]$ *за всяко* $x, y, z \in G$.

6. $[[x, y^\varphi], [a, b^\varphi]] = [[x, y], [a, b]^\varphi]$ *за всяко* $x, y, a, b \in G$.

7. $[x^n, y^\varphi] = [x, y^\varphi]^n = [x, (y^\varphi)^n]$ *за всяко цяло число n и* $x, y \in G$ *при* $[x, y] = 1$.

8. *Ако* $[G, G]$ *е от клас на нилпотентност* c, *тогава* $[G, G^{\varphi}]$ *е от клас на нилпотентност* c *или* $c+1$.

Лема 3.1.5. [Mo2, Лема 3.1]) *Нека* G *е нилпотентна група от клас* ≤ 3. *Тогава*

$$[x, y^n] = [x, y]^n [x, y, y]^{\binom{n}{2}} [x, y, y, y]^{\binom{n}{3}}$$

за всяко $x, y \in \tau(G)$ *и за всяко положително цяло число* n.

В параграф 3.2 разглеждаме множителите на Богомолов за някои p-групи. Наскоро, Михайлов доказа в [Mi] следните резултати:

Теорема 3.2.1. *Нека* $\theta : G_1 \to G_2$ *е хомоморфизъм на групи такъв, че неговото ограничение* $\theta|_{K_1} : K_1 \to K_2$ *е изоморфизъм, където* $K_1 \leq Z(G_1)$ *и* $K_2 \leq Z(G_2)$. *Нека* G *е централно произведение на* G_1 *и* G_2, *т.е.* $G = E/N$, *където* $E = G_1 \times G_2$ *и* $N = \{ab : a \in K_1, b \in K_2, \theta(a) = b^{-1}\}$. *Ако* $B_0(G_1/K_1) = B_0(G_1) = B_0(G_2) = 0$, *тогава* $B_0(G) = 0$.

Следствие 3.2.2. *Ако* G *е екстра-специална* p*-група от ред* p^{2n+1} *(за произволно* $n \geq 1$*), тогава* $B_0(G) = 0$.

Друго приложение на теорема 3.2.1 откриваме в следното следствие, където разглеждаме централните произведения на две разцепими метециклични p-групи.

Следствие 3.2.3. *Нека* $G = \langle \beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2 : [\beta_1, \alpha_1] =$

$\beta_1^{p^r}, [\beta_2, \alpha_2] = \beta_2^{p^r}, \alpha_1^{p^{a_1}} = \alpha_2^{p^{a_2}} = \beta_1^{p^b} = \beta_2^{p^b} = 1, \beta_1^{p^{b-1}} = \beta_2^{p^{b-1}} \rangle$, *където* $a_1, a_2, 1 \leq r \leq b-1, 2 \leq b$. *Тогава* $B_0(G) = 0$.

Нека p е нечетно просто число и нека $r \geq 1$ е цяло число. Нека $H = \langle \beta_1 \rangle \times \langle \beta_2 \rangle \simeq C_{p^{2r}} \times C_{p^{2r}}$ и $F = \langle \alpha_1 \rangle \times \langle \alpha_2 \rangle \simeq C_{p^r} \times C_{p^r}$. В параграф 3.2 показваме, че множителят на Богомолов е тривиален за шест групови разширения от $H^2(F, H)$. Те имат следните представяния (с пораждащи и съотношения):

$\mathrm{G}_1 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 : [\beta_1, \alpha_1] = \gamma_1 = \beta_2^{p^r}, [\beta_2, \alpha_2] = \gamma_2 = \beta_1^{p^r} \rangle$;
$G_2 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma : [\beta_1, \alpha_1] = [\beta_2, \alpha_2] = \gamma = \beta_2^{p^r} \rangle$;
$G_3 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 : [\beta_1, \alpha_1] = \gamma_1 = \beta_1^{p^r}, [\beta_2, \alpha_2] = \gamma_2 = \beta_2^{p^r}, [\alpha_1, \alpha_2] = \gamma_2 \rangle$;
$G_4 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 : [\beta_1, \alpha_1] = \gamma_1 = \beta_2^{p^r}, [\beta_2, \alpha_2] = \gamma_2 = \beta_1^{p^r} \beta_2^{p^r} \rangle$;
$G_5 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma : [\beta_1, \alpha_1] = [\beta_2, \alpha_2] = \gamma = \beta_1^{p^r} \beta_2^{p^r} \rangle$;
$G_6 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 : [\beta_1, \alpha_1] = \gamma_1 = \beta_1^{p^r}, [\beta_2, \alpha_2] = \gamma_2 = \beta_2^{p^r}, [\alpha_1, \alpha_2] = \gamma_1 \rangle$,
$[\mathrm{x},\ \mathrm{y}] = 1.,,, \beta_1^{p^{2r}} = \beta_2^{p^{2r}} = \alpha_1^{p^r} = \alpha_2^{p^r} = 1$. Следователно $\beta_1^{p^r}, \beta_2^{p^r} \in Z(G_i)$, т.е. G_i е p-група от клас на нилпотентност 2 (за $1 \leq i \leq 6$). Разглеждайки съотношенията в тези групи виждаме, че те са добре дефинирани. Не е трудно да се види, че всяка група G_i не е директно или централно произведение на по-малки групи.

Теорема 3.2.4. *Ако* G *е изоморфна на всяка от групите*

$G_i, 1 \leq i \leq 6$, *тогава* $B_0(G) = 0$.

Един от най-важните резултати в алгебрата е теоремата за разлагането по единствен начин на абелови групи, като директно произведение на циклични групи. Ясно е, че групата G е абелова тогава и само тогава, когато $G = Z(G)$, т.е. G се съдържа в центъра си. Във връзка с ньотеровата задача и множители на Богомолов, Солтман изтъкна нуждата от класификация на нилпотентните групи от клас 2. Припомняме, че неабеловата група G е от клас на нилпотентност 2 тогава и само тогава, когато $G' \leq Z(G)$, т.е. комутаторната група $G' = [G, G]$ се съдържа в центъра $Z(G)$. Доколкото знаем, досега са класифицирани само групите от клас 2, които имат 2 пораждащи елемента. Целта на параграф 3.3 е да представим компютърен алгоритъм, който класифицира, с точност до изоклинизъм, групите с 4 пораждащи и клас на нилпотентност 2.

Известно е ([НКК, Теорема 4.2]), че ако групата $G \simeq B \rtimes A$ е полудиректно произведение на абелова група B и бициклична група A, тогава $B_0(G) = 0$. Ние ще проучим по-общия случай, когато G е вътрешно произведение на абелова група и бициклична група. Тъй като този случай е много сложен, ще ограничим нашите разглеждания за следния специален вид групи. Нека G е p-група от клас на нилпотентност ≤ 2, нека B е абелова нормална подгрупа с две пораждащи и нека фактор групата G/B е абелова група с две пораждащи. Можем да запишем G като вътрешно произведение BA, където $B = \langle \beta_1, \beta_2 : \beta_1^{p^{b_1}} = \beta_2^{p^{b_2}} = 1, [\beta_1, \beta_2] = 1 \rangle$ и $A = \langle \alpha_1, \alpha_2 : \alpha_1^{p^{a_1}}, \alpha_2^{p^{a_2}}, [\alpha_1, \alpha_2] \in B \rangle$ за някои положителни цели числа a_1, a_2, b_1, b_2. Ясно е че, $B \simeq C_{p^{b_1}} \times C_{p^{b_2}}$ и $G/H \simeq C_{p^{a_1}} \times C_{p^{a_2}}$.

Понеже $G' \leq Z(G)$, може да запишем, че $[\beta_i, \alpha_j] = \beta_1^{u_{ij}} \beta_2^{v_{ij}} \in Z(G)$ за някои $0 \leq u_{ij} \leq p^{b_1} - 1, 0 \leq v_{ij} \leq p^{b_2} - 1$. Също така имаме, че $[\alpha_1, \alpha_2] = \beta_1^{c_1} \beta_2^{c_2} \in Z(G)$ за някои $0 \leq c_1 \leq p^{b_1} - 1, 0 \leq c_2 \leq p^{b_2} - 1$.

Намираме следните необходими и достатъчни условия за параметрите u_{ij}, v_{ij}, c_1, c_2, така че G да е коректно дефинирана p-група от клас на нилпотентност 2.

(3.1) $u_{ij} p^{a_j} \equiv 0 \pmod{p^{b_1}}, v_{ij} p^{a_j} \equiv 0 \pmod{p^{b_2}}$, за всяко i, j.

(3.2) $u_{ij} p^{b_i} \equiv 0 \pmod{p^{b_1}}, v_{ij} p^{b_i} \equiv 0 \pmod{p^{b_2}}$, за всяко i, j.

(3.3) $u_{12} d_1 + u_{22} e_1 \equiv c_1 p^{a_1} \pmod{p^{b_1}}$ и $v_{12} d_1 + v_{22} e_1 \equiv c_2 p^{a_1} \pmod{p^{b_2}}$.

(3.4) $-u_{11} d_2 - u_{21} e_2 \equiv c_1 p^{a_2} \pmod{p^{b_1}}$ и $-v_{11} d_2 - v_{21} e_2 \equiv c_2 p^{a_2} \pmod{p^{b_2}}$.

(3.5) $u_{ij} u_{1k} + v_{ij} u_{2k} \equiv 0 \pmod{p^{b_1}}$ и $u_{ij} v_{1k} + v_{ij} v_{2k} \equiv 0 \pmod{p^{b_2}}$, за всяко i, j, k.

(3.6) $c_1 u_{1k} + c_2 u_{2k} \equiv 0 \pmod{p^{b_1}}$ и $c_1 v_{1k} + c_2 v_{2k} \equiv 0$

(mod p^{b_2}), за всяко i, j, k.

По този начин, получаваме следната

Теорема 3.3.1. $\beta_1^{p^{b_1}} = \beta_2^{p^{b_2}} = 1, [\beta_1, \beta_2] = 1, [\beta_i, \alpha_j] = \beta_1^{u_{ij}} \beta_2^{v_{ij}}, [\alpha_1, \alpha_2]$
$= \beta_1^{c_1} \beta_2^{c_2}, \alpha_i^{p^{a_i}} = \beta_1^{d_i} \beta_2^{e_i}$ *дефинират p-група G от клас на нилпотентност ≤ 2 тогава и само тогава, когато условията (3.1)–(3.6) са изпълнени.*

Във връзка с изследванията на множителите на Богомолов, изследваме изоклиничните класове на тези групи. Припомняме, че две групи G и H се наричат изоклинични, ако съществуват изоморфизми $\theta : G/Z(G) \to H/Z(H)$ и $\phi : G' \to H'$, такива че $\phi([\alpha, \beta]) = [\alpha', \beta']$, където $\alpha' Z(H) = \theta(\alpha Z(G))$ и $\beta' Z(H) = \theta(\beta Z(G))$. Използваме компютърната програма GAP [GAP] и пакета HAP, да опишем алгоритъма пораждащ изоклиничните класове на групите с 4 пораждащи и клас на нилпотентност 2. За всяко p, a_1, a_2, b_1, b_2 зададени от потребителя, алгоритъмът връща представител на всеки клас, описан еднозначно чрез последователността от степените $[c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2, u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22}]$. В приложение 1 представяме нашия GAP алгоритъм. Например, ако $p = 3, a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1$, получаваме следната

Теорема 3.3.2. *Нека G е 3-група от клас на нилпотентност ≤ 2, нека B и факторгрупата G/B са изоморфни на $C_3 \times C_3$. Тогава G е изоклинична на точно една от след-*

ните две групи: $\{1\}$ *и групата на Хайзенберг означена от Джеймс в* [Ja] *като* $\Phi_2(111)$.

Оказва се, обаче, че функция "Arelsoclinic" вградена в пакета НАР е извънредно бавна и изисква много RAM. Например, проверката за двойка групи от ред 3^{10}, GAP се нуждае от 100 GB RAM, а и отнема месеци за да даде резултат. Освен това, функцията не позволява процесът да бъде разпределен на други компютри. Като се има предвид, че дори и за малки редове има стотици групи, които трябва да бъдат анализирани по двойки, става ясно, че тази функция няма да даде резултати.

Поради тази причина, намираме теоретични критерии за изоклинизъм, които могат да бъдат използвани за конструиране на друг алгоритъм. След това, съставяме новата GAP функция въз основа на резултатите от намерените критерии и специално предназначени за групите с шест пораждащи от клас на нилпотентност 2. Новата функция е значително по-бърза, особено ако се изпълнява на паралелни CPU ядра. Накрая, получаваме алгоритъма за изоклинична класификация на групите с шест пораждащи от клас на нилпотентност 2.

Доказваме следния критерий, когато произволно избрани два елемента от абелова група с две пораждащи генерират директни циклични множители.

Теорема 3.3.3. *Нека* p *е произвоно просто число и нека*

C е произволна абелова p-група с две пораждащи γ_1, γ_2, т.е. $C = \langle \gamma_1 \rangle \times \langle \gamma_2 \rangle \simeq C_{p^{c_1}} \times C_{p^{c_2}}$ за някакви естествени числа c_1, c_2. Тогава за произволни $\delta_1, \delta_2 \in C$ имаме, че $C = \langle \delta_1 \rangle \times \langle \delta_2 \rangle$ тогава и само тогава, когато $C = \langle \delta_1, \delta_2 \rangle$ и $\{|\delta_1|, |\delta_2|\} = \{p^{c_1}, p^{c_2}\}$.

Нека G е p-група от клас на нилпотентност ≤ 2, нека B е нормална абелова подгрупа с две пораждащи и нека факторгрупата G/B е абелова група с две пораждащи. В бъдеща статия ние ще покажем, че всяка такава група G е изоклинична на група породена от елементи $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$, така че $\alpha_j^{p^{a_j}} = \beta_i^{p^{b_i}} = \gamma_k^{p^{c_k}} = 1, [\alpha_1, \alpha_2] = 1, [\beta_1, \beta_2] = 1, [\beta_i, \alpha_j] = \gamma_1^{u_{ij}} \gamma_2^{v_{ij}}$, където $0 \leq u_{ij} \leq p^{c_1} - 1, 0 \leq v_{ij} \leq p^{c_2} - 1$ и i, j, k пробягват множеството $\{1, 2\}$. Също така, имаме $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle^p \cap Z(G) = \{1\}, \langle \beta_1, \beta_2 \rangle^p \cap Z(G) = \{1\}$ и $G' = \langle \gamma_1 \rangle \times \langle \gamma_2 \rangle \leq Z(G)$. Ние ще казваме, че G е от тип $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22})$. Условията за a_i, b_i, c_i така, че G да е добре определена са дадени в (3.1)–(3.6). Разбира се, типа на G зависи от избора на пораждащите $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$.

Доказваме следната

Теорема 3.3.4. *Групата G от тип $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22})$ е изоклинична на групата H от тип $(a_1', a_2', b_1', b_2', c_1', c_2', u_{11}', u_{12}', u_{21}', u_{22}', v_{11}', v_{12}', v_{21}', v_{22}')$, тогава и само тогава, когато съществуват $\alpha_i'' \in \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$, $\beta_i'' \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, и такива че $G = \langle \alpha_i'', \beta_i'', \gamma_i'' \rangle$ за $i = 1, 2$ и* *относно новите пораждащи, G е от тип* $(a'_1, a'_2, b'_1, b'_2, c'_1, c'_2, u'_{11}, u'_{12}, u'_{21}, u'_{22}, v'_{11}, v'_{12}, v'_{21}, v'_{22})$.

Както споменахме по-горе, функцията за изоклинизъм в пакета HAP е много бавна, така че ние предлагаме следната функция "ArelsoclinicČ", която може да замени същата функция във файла bogomolov.gi, която може да се намери в директорията `C:\gap4r7\pkg\Hap1.10\lib\NonabelianTensor`. Тази функция се базира на теорема 3.3.4. Функцията е изложена в приложение 2. Например, ако G е от тип $(1,1,1,1,1,1,u_{11},u_{12},u_{21},u_{22},v_{11},v_{12},v_{21},v_{22})$, може да конструираме алгоритъм, който е подобен на дадения в приложение 1. Този алгоритъм е изложен в приложение 3. Въпреки, че имаме 3^8 групи, които трябва да се класифицират, чрез разделяне циклите в последния алгоритъм, работата може да бъде разпределена на паралелни CPU ядра(и компютри). Получаваме следната

Теорема 3.3.5. *Нека G е 3-група от клас на нилпотентност ≤ 2 и нека G е от тип* $(1,1,1,1,1,1,u_{11},u_{12},u_{21},u_{22},v_{11},v_{12},v_{21},v_{22})$. *Тогава G е изоклинична на точно една от следните групи (според означенията на Джеймс* [Ja]*):* $\{1\}, \Phi_2(111), \Phi_4(1^5),\ \Phi_5(1^5), \Phi_{12}(1^6), \Phi_{13}(1^6), \Phi_{15}(1^6)$.

Като следствие от теореми 3.3.2 и 3.3.5 доказваме

Следствие 3.3.6. *Нека G е произволна група отговаряща на условията в теореми 3.3.2 и 3.3.5. Тогава $B_0(G) = 0$.*

Алгоритмите, които развихме в параграф 3.3 ни позволяват да класифицираме ефективно групите от клас на нилпотентност 2 с до шест пораждащи. Освен това, функцията "Arelsoclinic" може да бъде модифицирана лесно за групи с повече от шест пораждащи. В повечето случаи с които се сблъскахме, броят на изоклиничните класове е един и същ за всяко просто число p. Като се има предвид добре известния факт, че две изоклинични групи имат еднакъв множител на Богомолов, за в бъдеще ще може да докажем по-общи резултати, отнасящи се до множителите на Богомолов.

С П Р А В К А

на приносите в дисертацията

По мнение на автора, те са:

- Съществено доразвиване на методите за решаване на ньотеровата задача в неабеловия случай.
- Доказана е оптимизирана версия на резултата на Планс за ньотеровата задача за централни разширения на групи.
- Направена е класификация на централните групови разширения на метацикличните p-групи.
- Даден е положителен отговор на ньотеровата задача за централните разширения на бицикличните p-групи.
- Даден е положителен отговор на ньотеровата задача за централните разширения на неабеловите метациклични p-групи в 3 случая, в зависимост от вида на ядрото и изискванията за корени на единицата.
- Доказано, е че множителя на Богомолов е тривиален за шест групови разширения от $H^2(C_{p^r} \times C_{p^r}, C_{p^{2r}} \times C_{p^{2r}})$.
- Направено е описание на p-групите с четири пораждащи от клас на нилпотентност 2.
- Намерен е компютърен алгоритъм, който класифицира, с точност до изоклинизъм, p-групите с четири пораждащи.
- Намерен е критерий за изоклинизъм, за групите с шест пораждащи от клас на нилпотентност 2.

- Представена е функция “AreIsoclinic”, която може да замени съответната функция във файла “bogomolov.gi”, който се намира в директорията `C:\gap4r7\pkg\Hap1.10\lib\NonabelianTensor`.

- Намерен е GAP алгоритъм за изоклинична класификация на групите с шест пораждащи от клас на нилпотентност 2.

- Доказана е тривиалността на множителите на Богомолов за споменатите групи при $p = 3$.

Публикации включени в дисертацията

[MI] I. Michailov, I. Ivanov, Noether's problem for central extensions of metacyclic p-groups, *JP Journal of Algebra, Number Theory & Applications*, **Vol. 37** No. 3, 2015, 203–243.

[MIZ1] I. Michailov, I. Ivanov, N. Ziapkov, Noether's problem for abelian extensions of bicyclic and metacyclic p-groups, *Compt. Rend. de'l Acad. Bulg. D. Sc*, **67**, No. 6, 2014, 737–744.

[MIZ2] I. Michailov, I. Ivanov, N. Ziapkov, Noether's problem for abelian extensions of cyclic and metacyclic p-groups, сборник от научни трудове от научна конференция "МАТТЕХ", Университетско издателство „Епископ К. Преславски", Шумен, 2012, стр. 26-29.

[MIZ3] I. Michailov, I. Ivanov, N. Ziapkov, Noether's problem for central cyclic extensions of metacyclic p-groups, сборник от научни трудове „40 години Шуменски университет 1971-2011" , Университетско издателство „Епископ К. Преславски", Шумен, 2011, стр. 16-21.

[MIZ4] I. Michailov, I. Ivanov, N. Ziapkov, Algorithmic generation of isoclinism classes for 4-generator groups of nilpotency class 2, *Proceedings of Russe University*, **54** No. 6.1, 2015, 24–27.

[MIAI] I. Michailov, I. Ivanov, A. Aleksandrova, G. Ilianova, Algorithmic determination of isoclinism for 6-generator groups of nilpotency class 2, *Proceedings of Russe University*, **54**, No. 6.1, 2015, 28–32.

А П Р О Б А Ц И Я

на резултатите

Включените в дисертацията резултати, са публикувани в съавторство с: Иво Михайлов в [MI], Иво Михайлов и Н. Зяпков в [MIZ1, MIZ2, MIZ3, MIZ4] и Иво Михайлов, А. Александрова и Г. Илиянова в [MIAI].

Статиите са публикувани в научните списания *JP Journal of Algebra, Number Theory & Applications; Доклади на БАН и Сборници от научни конференции.*

Резултатите от дисертацията са докладвани на:

1. Юбилейна конференция "40 години Шуменски Университет 1971-2011", Шумен, 2011 г.

   - I. Michailov, I. Ivanov, N. Ziapkov, *Noether's problem for central cyclic extensions of metacyclic p-groups*

2. Международна конференция MATTEX, Шумен, 2012 г.

   - I. Michailov, I. Ivanov, N. Ziapkov, *Noether's problem for abelian extensions of cyclic and metacyclic p-groups*

3. Международна конференция „Mathematical Days in Sofia", ИМИ-БАН, 7-10 Юли, 2014 г.

   - I. Michailov, I. Ivanov, N. Ziapkov *"Noether's problem for finite p-groups"*

4. Научна конференция на Русенски Университет, Русе, 2015 г.

    - I. Michailov, I. Ivanov, A. Aleksandrova, G. Ilianova, *Algorithmic determination of isoclinism for 6-generator groups of nilpotency class 2*
    - I. Michailov, I. Ivanov, N. Ziapkov, *Algorithmic generation of isoclinism classes for 4-generator groups of nilpotency class 2*

Литература

[МЗ] И. Михайлов, Н. Зяпков, "Висша алгебра и теория на Галоа", Фабер, Велико Търново, 2004.

[AHK] H. Ahmad, S. Hajja and M. Kang, Rationality of some projective linear actions, *J. Algebra* **228** (2000), 643–658.

[Al] A. A. Albert, Modern higher algebra, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1937.

[AMM] A. Ahmad, A. Magidin and R. Morse, Two-generator p-groups of nilpotency class two and their conjugacy classes, *Publ. Math. Debrecen* **81** (2012), 145–166.

[Bo] F. A. Bogomolov, The Brauer group of quotient spaces by linear group actions, *Math. USSR Izv.* **30** (1988), 455—485.

[BK] Michael R. Bacon and Luise-Charlotte Kappe, The nonabelian tensor square of a 2-generator p-group of class 2, *Arch. Math.* (Basel) **61** (1993), no. 6, 508—516.

[BM] R. Blyth and R. Morse, Computing the nonabelian tensor square of polycyclic groups, *J. Algebra* **321** (2009), 2139–2148.

[CK] H. Chu and M. Kang, Rationality of p-group actions, *J. Algebra* **237** (2001), 673–690.

[Ga] W. Gaschütz, Fixkörper von p-Automorphismengruppen rein-transzendenter Körpererweiteriungen von p-Charakteristik. *Math. Z.*, **71** (1959), pp. 466–468.

[GAP] The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.10; 2007. (`http://www.gap-system.org`)

[GMS] S. Garibaldi, A. Merkurjev and J-P. Serre, Cohomological invariants in Galois cohomology, AMS Univ. Lecture Series vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, 2003.

[Ha1] M. Hajja, A note on monomial automorphisms, *J. Algebra* **85** (1983), 243—250.

[Ha2] M. Hajja, Rationality of finite groups of monomial automorphisms of $k(x, y)$, *J. Algebra* **109** (1987), 46-–51.

[Har] D. Harbater, Fundamental groups and embedding problems in characteristic p, *Recent Developments in the Inverse Galois Problem (Seattle, WA, 1993), Contemp. Math.* **186** (1995), 353-369.

[HK] S. Hajja and M. Kang, Some actions of symmetric groups, *J. Algebra* **177** (1995), 511–535.

[HuK] S. Hu and M. Kang, Noether's Problem for Some p-groups, in "Rationality problem", edited by F. Bogomolov and Y. Tschinkel, Progress in Math., Birkhauser, Boston, 2008. (available at `http://arxiv.org/abs/0704.1701`)

[HKK] S. Hoshi, M. Kang and B. Kunyavskii, Noether's Problem and unramified Brauer groups *Asian J. Math.* **17** No.4 (2013), 689–714.

[Ja] R. James, The groups of order p^6 (p an odd prime), *Math. Comp.* **34** No. 150 (1980), 613–637.

[Ka1] M. Kang, Noether's problem for metacyclic p-groups, *Adv. Math.* **203** (2005), 554–567.

[Ka2] M. Kang, Noether's problem for p-groups with a cyclic subgroup of index p^2, *Adv. Math.* **226** (2011) 218–234.

[Ka3] M. Kang, Retract rationality and Noether's problem, *Int. Math. Res. Not.* **15** (2009) 2760–2788.

[JLY] C. Jensen, A. Ledet and N. Yui, "Generic polynomials: constructive aspects of the inverse Galois problem", Cambridge University Press, 2002.

[Ku] B. E. Kunyavskiĭ, The Bogomolov multiplier of finite simple groups, *Cohomological and geometric approaches to rationality problems*, 209–217, Progr. Math., 282, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010.

[Le] A. Ledet, "Brauer Type Embedding Problems", Fields Institute Monographs **21**, American Mathematical Society, 2005.

[Mi] I. Michailov, Bogomolov Multipliers for Some p-groups of Nilpotency Class 2, *Acta Math. Sinica*, **32** No. 5, 541–552 (2016).

[MI] I. Michailov, I. Ivanov, Noether's problem for central extensions of metacyclic p-groups, *JP Journal of*

Algebra, Number Theory & Applications, **Vol. 37** No. 3, 203–243 (2015).

[MIZ1] I. Michailov, I. Ivanov, N. Ziapkov, Noether's problem for abelian extensions of bicyclic and metacyclic p-groups, *Compt. Rend. de'l Acad. Bulg. D. Sc*, **67**, No. 6, 2014, 737–744.

[MIZ2] I. Michailov, I. Ivanov, N. Ziapkov, Noether's problem for abelian extensions of cyclic and metacyclic p-groups, сборник от научни трудове от научна конференция "MATTEX", Университетско издателство „Епископ К. Преславски", Шумен, 2012, стр. 26-29.

[MIZ3] I. Michailov, I. Ivanov, N. Ziapkov, Noether's problem for central cyclic extensions of metacyclic p-groups, сборник от научни трудове „40 години Шуменски университет 1971-2011" , Университетско издателство „Епископ К. Преславски", Шумен, 2011, стр. 16-21.

[MIZ4] I. Michailov, I. Ivanov, N. Ziapkov, Algorithmic generation of isoclinism classes for 4-generator groups of nilpotency class 2, *Proceedings of Russe University*, **54** No. 6.1, 24–27 (2015).

[MIAI] I. Michailov, I. Ivanov, A. Aleksandrova, G. Ilianova, Algorithmic determination of isoclinism for 6-generator groups of nilpotency class 2, *Proceedings of Russe University*, **54** No. 6.1, 28–32.

[Mo1] P. Moravec, Unramified Brauer groups of finite and infinite groups, *Amer. J. Math.* **134** (2012), 1679–1704.

[Mo2] P. Moravec, Groups of order p^5 and their unramified Brauer groups, *J. Algebra* **372**, 420–427 (2012).

[Mo3] P. Moravec, Unramified Brauer groups and isoclinism, *Ars Math. Contemp.* **7** (2) 2014, 337–340.

[MM] G. Malle & B. H. Matzat, "Inverse Galois Theory Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 1999.

[No] E. Noether, Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe, *Math. Ann.* **78** (1918), 221–29.

[Pl] B. Plans, On Noether's problem for central extensions of symmetric and alternating groups, *J. Algebra* **321** (2009), 3704-3713.

[Ro] P. Roquette, On the Galois cohomology of the projective linear group and its applications to the construction of generic splitting fields of algebras, *Math. Ann.* **150** (1963), 411-439.

[Sa1] D. J. Saltman, Generic Galois extensions and problems in field theory, *Adv. Math.* **43** (1982), 250–283.

[Sa2] D. J. Saltman, Noether's problem over an algebraically closed field, *Invent. Math.* **77** (1984), 71–84.

[Sa3] D.J. Saltman, Twisted multiplicative field invariants, Noether's problem, and Galois extensions, *J. Algebra* **131** (2) (1990), 535-558.

[Schur] I. Schur, Gleichungen ohne Affekt, Sitzungsberichte Akad. Berlin (1930), 443-449.

[Sw] R. Swan, Noether's problem in Galois theory, in "Emmy Noether in Bryn Mawr edited by B. Srinivasan and J. Sally, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[Se] J.-P. Serre, ''Topics in Galois Theory'', Research Notes in Mathematics, Jones & Barlett, 1992.

[Vö] H. Völklein, ''Groups as Galois Groups, an Introduction'', Cambridge Studies in Advanced Mathematics 53, Cambridge University Press, 1996.

Считам за свое приятно задължение да изкажа искрената си благодарност на научният ми ръководител проф. д-р Никола Зяпков, който с много внимание и търпение ми помогна да навляза в същността на теорията на Галоа и от когото съм получавал ценни съвети и насоки по въпроси, отнасящи се до научната ми работа.

Искрено благодаря и на проф. дмн Иво Михайлов, който винаги е бил отзивчив, толерантен и добронамерен в отношението си към мен. Благодаря му за подкрепата, която ми е оказвал през годините на съвместната ни научна работа.

Благодаря и на колегите от катедра "Алгебра и геометрия" , в чието отношение винаги съм срещал разбиране и подкрепа.

Не на последно място сърдечно благодаря на семейството си, което неотлъчно беше зад мен и ми даваше увереност за всичко, което правя.