РЕЗЮМЕТА НА ПУБЛИКАЦИИТЕ ЗА УЧАСТИЕ В КОНКУРСА

за заемане на академичната длъжност "професор"в област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика професионално направление 4.5 Математика (Математически анализ)

на доц. д.м.н. Севджан Ахмедов Хаккъев

за нуждите на катедра "Математически анализ" при ФМИ на ШУ "Епископ Константин Преславски", обявен в "Държавен вестник бр. 55/12.07.2019 г.

(публикациите не повтарят представените за придобиване на образователната и научна степен "доктор", на научната степен "доктор на науките" и за заемане на академичната длъжност "доцент")

1 Учебници и учебни помагала

1.1. О. Христов, С. Хаккъев, Лекции по обикновени диференциални уравнения, (2013) ISBN 978-954-577-956-5.Университетско издателство Еп. Константин Преславски, Шумен

Този учебник е предназначен за Дистанционно обучение по Обикновени Диференциални Уравнения за студентите от Шуменския университет от специалностите Математика и Информатика, Икономическа Информатика, Компютърна Информатика и Компютърни и Информационни Технологии.

Авторите сме се старали да напишем стандартен учебник, много близък до лекцион- ните курсове, като целенасочено сме избягвали включването на други важни и интересни теми. Като всеки математически текст, лекциите съдържат доказателства на някои основни теореми. Тези доказателства са дадени с малък шрифт и могат да бъдат про- пуснати на първо четене. Методите разгледани във всяка тема са илюстрирани с много примери. Всяка секция завършва с набор от задачи за самостоятелна работа. Тяхното решаване е гаранция за добро усвояване на материала. Застъпени са следните теми: Обикновенни диференциални уравнения от първи ред, линейни уравнения от втори ред, системи линейни уравнения и качествени методи. Дадени са и две допълнения, припомнящи някои от необходимите за изложението сведения от Математическия анализ и Линейната алгебра.

2 Статии

1. **J. Angulo, A. Corcho, S. Hakkaev**, Well-posedness and stability in the periodic case for the Benney system, **Advances in Differential Equations**, 16(2011), 523-550 (Q1)

В тази статия се разглежда система от взаимодействащи се вълни, известна още като система на Бени

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} = uv + \beta|u|^2 u, \\ v_t = (|u|^2)_x, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

където $u(x,t)$ е комплексно значна функция описваща къса вълна и $v(x,t)$ е реално значна функция описваща дълга вълна. С H^s_{per} означаваме стандартното Соболево пространство от периодични функции и въвеждаме следните пространства на Бурген

$$||f||_{X^{s,b}_{per}} = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|n|)^{2s}(1+|\tau+n^2|^{2b}|\widehat{f}(n,\tau)|^2)d\tau)^{\frac{1}{2}},$$

$$||f||_{X^r_{per}} = ||f||_{X^{r,\frac{1}{2}}_{per}} + ||\langle n\rangle^r \widehat{f}(n,\tau)||_{l^2_n L^1_\tau},$$

$$||f||_{Y^s_{per}} = ||f||_{H_t^{\frac{1}{2}} H^s_{per}} + ||\langle n\rangle^s \widehat{f}(n,\tau)||_{l^2_n L^1_\tau}.$$

За задачата на Коши е доказана следната теорема.

Теорема 2.1. *За всяко $(u_0, v_0) \in H^r_{per} \times H^s_{per}$ и за r, s удовлетворяващи условията*

$$max\{0, r-1\} \le s \le min\{r, 2r-1\}$$

съществува $T = T(||u_0||_r, ||v_0||_s)$ и единствено решение $(u(x,t), v(x,t))$ на задачата на Кошио (1), като

$$\begin{array}{l} (a)\ (\eta_T(t)u, \eta_T(v)) \in X^r_{per} \times Y^s_{per} \\ (b)\ (u,v) \in C(\triangle T; H^r_{per} \times H^s_{per}). \end{array}$$

Освен това, изображението $(u_0, v_0) \to (u(t), v(t))$ е локално равномерно непрекъснато от $H^r_{per} \times H^s_{per}$ в $C(\triangle T; H^r_{per} \times H^s_{per})$.

Намерени са и условия при които задачата на Коши не е добре поставена.

Теорема 2.2. *Нека $\beta \neq 0$. Тогава, за всяко $r < 0$ и $s \in \mathbb{R}$, задачата на Коши (1) не е добре поставена в $H^r_{per} \times H^s_{per}$.*

Периодичните вълни от вида

$$\begin{cases} u(x,t) = e^{-iwt} e^{ic(x-ct)/2} \varphi_{w,c}(x-ct) \\ v(x,t) = n_{w,c}(x-ct), \end{cases}$$

където $\varphi_{w,c}, n_{w,c}$ са реални, гладки и приодични функции с период L, са

$$\begin{cases} \varphi_{w,c}(x-ct) \sqrt{\frac{c}{1-\beta c}} \eta_1 dn(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}; \kappa) \\ n_{w,c}(x-ct) = \frac{\eta_1^2}{1-\beta c} dn^2(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}; \kappa) \end{cases} \tag{2}$$

и е доказана следната теорема свързана със стабилността на тези периодични вълни.

Теорема 2.3. *Нека $(w,c) \in \mathcal{A}_\beta$, където $\mathcal{A}_\beta = \{(x,y) : y > 0, 1 > \beta y, \ x < -\frac{-2\pi^2}{L^2} - \frac{y^2}{4}\}$ и за $c > 0$ съществува $q \in \mathbb{N}$ такова, че $3\pi q/c = L$. Нека $\sigma = -w - \frac{c^2}{4}$. Тогава $(\Phi(\xi) = e^{ic\xi/2}\varphi_{w,c}(\xi), \Psi(\xi) = n_{w,c}(\xi)$, където $\varphi_{w,c}, n_{w,c}$ са дадени в (2), е орбитално устойчива в $H^1_{per}([0,L]) \times L^2_{per}([0,L])$:*
(a) за $\beta \leq 0$
(b) за $\beta > 0$ и $8\beta\sigma - 3c(1-\beta c)^2 \leq 0$.

2. **O. Christov, S. Hakkaev, I. Iliev,** Non-uniform continuity of periodic Holm-Staley b-family of equations, **Nonlinear Analysis**, 75 (2012), 4821-4838 (Q1)

Разглеждаме фамилия от уравнения, известна още като Холм - Стали b - фамилия, която включва в себе си уравненията на Камаса-Холм и Дегасперис-Процеси.

$$m_t + um_x + bu_x m = 0, \tag{3}$$

където $m = u - u_{xx}$, а константата b е бифуркационен параметър. Показано е, че изображението начлно-условие $\rightarrow$ решение не е равномерно непрекъснато. За целта са построени гладки периодични вълни с малки амплитуди.

Теорема 2.4. *За всяко $s \geq 3$, изображението $u_0 \to u$ за $b \neq 0$, не е равномерно непрекъснато от $\mathrm{H}^s(\mathbb{S})$ в $\mathrm{C}([0,t_0],\mathrm{H}^s(\mathbb{S}))$. Освен това, за всяко $s \geq 3$ същесвуват $c_{1,2} > 0$ и две редици от гладки решения u_n, v_n на уравнението (3) такива, че за всяко $t \in [0,1]$*

$$\sup_n ||\, u_n(t)||_{\mathrm{H}^s} + \sup_n ||v_n(t)||_{\mathrm{H}^s} \leq c_1,$$

$$\lim_{n\to\infty} ||\, u_n(0) - v_n(0)||_{\mathrm{H}^s} = 0,$$

$$\liminf_n ||\, u_n(t) - v_n(t)||_{\mathrm{H}^s} \geq c_2 \sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

3. **S. Hakkaev. M. Stanislavova, A. Stefanov**, Transverse instability for periodic traveling waves of KP-I and Schrodinger equations, **Indiana University Mathematics Journal**, 61(2)(2012), 461-492 (Q3)

В тази статия разглеждаме квадратичното и кубиченното уравнение на Кадомтцев-Петвиашвили (KP - I)

$$\begin{cases} (u_t + \partial_{xxx}u + \partial_x(f(u)))_x - \partial_{yy}u = 0, \quad (t,x,y) \in \mathbb{R}_+ \times [0,K_1] \times [0,K_2] \\ u(t,x+K_1,y) = u(t,x,y); u(t,x,y+K_2) = u(t,x,y) \end{cases} \tag{4}$$

и нелинейното уравнение на Шрьодингер в $1+2$ размерности с периодични гранични условия

$$\begin{cases} iu_t - (u_{xx} + u_{yy}) - f(|u|^2)u = 0, (t,x,y) \in \mathbb{R}_+ \times [0,K_1] \times [0,K_2] \\ u(t,x+K_1,y) = u(t,x,y); \;\; u(t,x,y+K_2) = u(t,x,y). \end{cases} \tag{5}$$

Интересуваме се от устойчивостта на периодичните вълни. За линеаризираната задача от вида

$$v_t = \mathcal{A}v. \tag{6}$$

имаме следната дефиниция за спектрална и линейна устойчивост.

Дефиниция 1. Нека $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\varphi)$ е генератор на C_0 полугрупа в Банаховото пространство X. Казваме, че решението φ на линейната задача (6) е спектрално устойчива, ако $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda : \Re\lambda \leq 0\}$.

Казваме, че решението φ на линейната задача (6) е линейно устойчива, ако ръста на полугрупата $e^{t\mathcal{A}}$ е неотрицателна, което е еквивалентно на това, че всяко решение на (6) с $v(0) \in X$ притежава свойството

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\delta t}\|v(t,\cdot)\| = 0$$

за всяко $\delta > 0$.

Решенията от вида на периодични вълни на уравненията на Кортевег-де Фриз (КдФ) и модифицирания Кортевег-де Фриз (mКдФ), са също и решения на уравнението KP-I. Разглеждаме пертурбации от вида $u(t, x, y) = \varphi(x - ct) + v(t, x - ct, y)$. След като игнорираме всички нелинейни членове, имаме следното линейно уравнение за v

$$(v_t + v_{xxx} - cv + (f'(\varphi)v)_x)_x - \partial_{yy} v = 0. \tag{7}$$

Търсим решения от вида

$$v(t, x, y) = e^{\sigma t} e^{iky} V(x),$$

където $\sigma \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$ и $V(x)$ е периодична функция със същия период както вълната $\varphi(x)$.

Търсим V от вида $V = \partial_x U$. Като заместим в уравнението, имаме следната спектрална задача

$$-\sigma \partial_x U = (-\partial_x(-\partial_{xx} + c - f'(\varphi))\partial_x + k^2)U.$$

Тази задача за собствените стойности е от вида

$$\sigma A(k)U = L(k)U, \tag{8}$$

с

$$A(k) = -\partial_x, \quad L(k) = -\partial_x(-\partial_{xx} + c - f'(\varphi))\partial_x + k^2.$$

Когато $f(u) = \frac{u^2}{2}$ KP-I притежава периодични решения от cnoidal тип.

Теорема 2.5. *Разглеждаме уравнението KP - I (т.е.* (4) *при* $f(u) = \frac{u^2}{2}$*). Съществува период* K_2 *така, че вълните от cnoidal тип са спектрално и линейно неустойчиви за всички стойности на параметрите* $\kappa \in (0, 1)$ *и* T*.*

Когато $f(u) = u^3$ KP-I притежава периодични решения от dnoidal тип.

Теорема 2.6. *Разглеждаме уравнението KP - I* (4) *при* $f(u) = u^3$*. Съществува период* K_2 *така, че вълните от dnoidal тип са спектрално и линейно неустойчиви за всички стойности на параметрите* $\kappa \in (0, 1)$ *и* T*.*

Линейната задача за нелинейното уравнение на Шрьодингер е от вида

$$\sigma \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{L}_+ + k^2 \\ -(\mathcal{L}_- + k^2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{9}$$

Нека $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Да отбележим, че $J^* = J^{-1} = -J$. В термините на z_1, z_2, имаме следното уравнение

$$\sigma J \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = -J \begin{pmatrix} \mathcal{L}_- + k^2 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_+ + k^2 \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

В този случай задачата (8) е със следните оператори

$$A(k) = \sigma J; \;\; L(k) = -J \begin{pmatrix} \mathcal{L}_- + k^2 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_+ + k^2 \end{pmatrix} J = -J \begin{pmatrix} \mathcal{L}_- & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_+ \end{pmatrix} J + k^2 Id \tag{10}$$

Имаме следните резултати свързани с квадратичния и кубичния Шрьодингер.

Теорема 2.7. *Квадратичното уравнение на Шрьодингер* (5) *(за $f(z) = \sqrt{z}$) има решения от cnoidal тип. Съществува K_2 такова, че cnoidal тип решенията са спектрално и линейно неустойчиви за всички стойности на параметъра $\kappa \in (0,1)$.*

Кубичното уравнение на Шрьодингер (5) *(за $f(z) = z$) има решения от dnoidal тип. Съществува K_2 такова, че dnoidal тип решенията са спектрално и линейно неустойчиви за всички стойности на параметъра $\kappa \in (0,1)$.*

4. **S. Hakkaev, M. Stanislavova, A. Stefanov**, Orbital stability for periodic standing waves for the Klein-Gordon-Zakharov system and the beam equation, **Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Physik**, 64(2) (2013), 265-282 (Q1)

В тази статия се разглежда орбиталната устойчивост на периодични вълни от вида $(e^{i\omega t}\varphi_\omega, \psi_\omega)$ за системата на Клейн-Гордон-Закхаров

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u + uv = 0, \\ v_{tt} - c^2 v_{xx} = (|u|^2)_{xx} \end{cases} \tag{11}$$

Първо е получен следния резултат за задачата на Коши.

Теорема 2.8. *Нека $\alpha > 1/2$. Задачата на Коши за* (11), *е локално добре поставена в $H^{\alpha} \times H^{\alpha-1} \times H^{\alpha-1} \times H^{\alpha-2}$.*

След това е построена еднопараметрична фамилия от периодични dnoidal вълни за системата с период по голям от $\sqrt{2}\pi$. Показано е също така, че тези вълни са устойчиви ако са изпълнени условията от типа на Грилакис-Шата-Щраус.

Теорема 2.9. *Нека $L > \sqrt{2}\pi$ е фиксиран период. Тогава вълните са орбитално устойчиви за всички ω удовлетворяващо неравенствата*

$$\sqrt{-\frac{G(\kappa_0(L))}{F(\kappa_0(L))}} \leq |\omega| \leq \sqrt{1-\frac{2\pi^2}{L^2}} \tag{12}$$

където

$$F(\kappa) = \left[2(2-\kappa^2)E^2(\kappa) - 2(1-\kappa^2)E(\kappa)K(\kappa) - (2-\kappa^2)(1-\kappa^2)K^2(\kappa)\right]$$
$$G(\kappa) = 2(1-\kappa^2)E(\kappa)K(\kappa) - (2-\kappa^2)E^2(\kappa)$$

и $E(\kappa), K(\kappa)$ са стандартни елиптични интеграли, а $\kappa_0(L)$ е обратима функция.

$$\kappa \to \frac{2\sqrt{2-\kappa^2}K(\kappa)}{\sqrt{1+\frac{G(\kappa)}{F(\kappa)}}}, \quad \kappa \in (0,1)$$

Също така са пресметнати интервалите за параметъра ω в термините на периода L и е показано, че при $L \to \infty$ покрива добре известните резулатати за орбиталната устойчивост на уединените вълни.

За уравнението

$$u_{tt} + \Delta^2 u + u - |u|^{p-1}u = 0, \tag{13}$$

е показано, че съществуват периодични стоящи вълни и е изследвана тяхната орбитална устойчивост.

5. **S. Hakkaev, I. Iliev, K. Kirchev**, Stability of periodic traveling waves for the quadratic and cubic nonlinear Schrodinger equations, **International Journal of Bifurcation and Chaos**, 23(5)(2013), 1350090 (20pp.) (Q2)

В тази статия се разглежда нелинейното уравнение на Шрьодингер (NLS)

$$iu_t + u_{xx} + |u|^p u = 0. \tag{14}$$

По точно се разглежда орбиталната устойчивост на фамилия от периодични вълни

$$u = \varphi(x,t) = e^{i(vx+(\omega-v^2)t)} r(x-2vt). \tag{15}$$

където $r(y)$ е реално значна T-периодична функция и $v, \omega \in \mathbf{R}$ са параметри.

Анализа на устойчивостта на периодичните решения се основава на добре подбрани закони на съхранение. Целта е да се покаже, че φ е минимизатор на функцинал M, който също е инвариантен спрямо времето. За да покажем, че орбитата

$$\mathcal{O} = \{e^{i\eta}\varphi(\cdot - \xi, t) : \ (\xi,\eta) \in [0,T] \times [0,2\pi]\}$$

е устойчива, разглеждаме следната пертурбация

$$u(x,t) = e^{i\eta}\varphi(x-\xi,t) + h(x,t) = e^{i\zeta}[r(x-\xi-2vt) + h_1 + ih_2]$$

като в разлагането на $M(u) - M(\varphi)$ основните членове са $\langle L_1 h_1, h_1\rangle + \langle L_2 h_2, h_2\rangle$, а L_i са от втори ред самоспрегнати диференциални оператори в $L^2[0,T]$ с потенциали зависещи от r и с условията $L_1 r' = L_2 r = 0$. Основен момент в доказателството е изискванията , че нулата е втора собствена стойност на L_1 и първа собствена стойност за L_2.

Уравнение (14) има следните закони за съхранение

$$Q(u) = i\int_0^T \overline{u}_x u dx, \quad P(u) = \int_0^T |u|^2 dx, \quad E(u) = \int_0^T (|u_x|^2 - \frac{2|u|^3}{3}) dx.$$

Разглеждаме функционала

$$M(u) = E(u) + (\omega + v^2)P(u) - 2vQ(u).$$

Въвеждаме псевдометрикте

$$d(u,\varphi) = \inf_{(\eta,\xi)\in[0,2\pi]\times[0,T]} ||u(x,t) - e^{i\eta}\varphi(x-\xi,t)||_1. \tag{16}$$

и за фиксирано $q > 0$,

$$d_q^2(u,\varphi) = \inf_{(\eta,\xi)\in[0,2\pi]\times[0,T]} (||u_x(x,t) - e^{i\eta}\varphi_x(x-\xi,t)||^2 + q||u(x,t) - e^{i\eta}\varphi(x-\xi,t)||^2). \tag{17}$$

За случаите $p = 1$ и $p = 2$ е доказано, че съответните периодични вълни са орбитално устойчиви.

Теорема 2.10. *За всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко решение $u(x,t)$ на (8) за което $d(u,\varphi)_{|t=0} < \delta$, то $d(u,\varphi) < \varepsilon \; \forall t \in [0,\infty)$.*

Съществен момент за доказателството на теоремата играе следния резултат.

Твърдение 2.1. *Съществуват положителни константи Λ, q, δ_0 такива, че ако u е решение на (14), $u(x,t) = u(x+T,t)$, $P(u) = P(\varphi)$ и $d_q(u,\varphi) < \delta_0$, то*

$$M(u) - M(\varphi) \geq \Lambda d_q^2(u,\varphi). \tag{18}$$

6. **S. Hakkaev, M. Stanislavova, A. Stefanov**, Spectral stability for subsonic traveling pulses of the Boussinesq 'abc' system, **SIAM Journal on Applied Dynamical Systems**, 12(2)(2013), 878-898 (Q1)

В тази работа се разглежда следната система на Бусинеск

$$\begin{array}{l} \eta_t + u_x + (\eta u)x + a u_{xxx} - b\eta_{xxt} = 0, \\ u_t + \eta_x + u u_x + c\eta_{xxx} - d u_{xxt} = 0. \end{array} \tag{19}$$

Тъй като тази система е изведена от уравнението на Ойлер като се игнорира ефекта на дисипация, нормално е да се очаква, че тя има Хамилтонова структура. Оказва се обаче, че това е само в някои случаи за параметрите. Наистина, ако b = d, то Хамилтониана е

$$H(\eta,u) = -c\eta_x^2 - a u_x^2 + \eta^2 + (1+\eta)u^2 dx. \tag{20}$$

Освен това, $H(\eta,u)$ е положително дефинитна за $a, c < 0$. Поради тези рестрикции разглеждаме случаите $b = d$ и $a, c < 0$. Решенията от вида на бягащи вълни са $\eta(x,t) = \varphi(x-wt), u(x,t) = \psi(x-wt)$, където

$$\varphi = \eta_0 sech^2(\lambda x), \quad \psi = B(\eta_0)\eta_0 sech^2(\lambda x). \tag{21}$$

В тази статия се разглежда спектралната устойчивост на бягащите вълни. За целта, разглеждаме пертурбациите

$$\begin{array}{l} \eta = \varphi(x-wt) + v(t,x-wt), \\ u = \psi(x-wt) + z(t,x-wt), \end{array} \tag{22}$$

и след игнориране на квадратичните членове получаваме следната линейна задача

$$(1 - v\partial_x^2)\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}_t = -\partial_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + c\partial_x^2 & bw\partial_x^2 + \psi - w \\ bw\partial_x^2 + \psi - w & 1 + a\partial_x^2 + \varphi \end{pmatrix} \tag{23}$$

която е от вида

$$u_t = JLu. \tag{24}$$

Дефиниция 2. Казваме, че задачата (24) е неустойчива ако същесвуват $\mathbf{f} \in H^2(\mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R})$ и $\lambda : \Re\lambda > 0$ такива, че

$$JL\mathbf{f} = \lambda\mathbf{f}. \tag{25}$$

В противен случай казваме, че (24) е устойчива. По точно, устойчива когато (25) няма решение за $\lambda : \Re\lambda > 0$.

За случая $a = c = -b, b > 0$, имаме следния резултат.

Теорема 2.11. *Нека $a = c = -b, b > 0$. Тогава, решенията от вида на бягащи вълни на 'abc' системата*

$$\left(\eta_0 sech^2\left(\frac{x - wt}{2\sqrt{b}}\right), \pm\eta_0\sqrt{\frac{3}{\eta_0 + 3}} sech^2\left(\frac{x - wt}{2\sqrt{b}}\right)\right) \tag{26}$$

при $w = \pm\frac{3+2\eta_0}{\sqrt{3(3+\eta_0)}}$ са устойчиви за $\eta_0 : \eta_0 \in (-\frac{9}{4}, 0)$. Еквивалентно, всички вълни в (26) са устойчиви за всички скорости $|w| < 1$.

Другия случай който се разглежда е $a = c < 0, b = d > 0$.

Теорема 2.12. *Нека $a = c < 0, b = d > 0$. Решенията от вида на стояща вълна за системата на Бусинеск*

$$\varphi(x) = \frac{3}{2} sech^2\left(\frac{x}{2\sqrt{-a}}\right), \;\; \psi(x) = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} sech^2\left(\frac{x}{2\sqrt{-a}}\right) \tag{27}$$

са спектрално устойчиви тогава и само тогава когато

$$\langle (a\partial_x^2 + 1 - \varphi)^{-1}(\varphi - b\varphi''), (\varphi - b\varphi'')\rangle \leq 8\sqrt{-a}\left(\frac{9}{2} + \frac{12}{5}\frac{b}{|a|} - \frac{3}{10}\frac{b^2}{a^2}\right). \tag{28}$$

Освен това, съществува константа γ такава, че условието (28) е изпълнено тогава и само тогава когато

$$0 < \frac{b}{|a|} < \gamma \sim 8.42083.$$

7. **S. Hakkaev, M. Stanislavova, A. Stefanov**, Linear stability analysis for periodic traveling waves of the Boussinesq equation and the KGZ system, **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics**, 144(03) (2014), 455-489 (Q1)

В тази статия се разлгежда линейната устойчивост на периодични вълни за уравнението на Бусинеск

$$u_{tt} + u_{xxxx} - u_{xx} + (f(u))_{xx} = 0, \tag{29}$$

където $f(u) = u^p, p > 1$ (за случаите p = 2, 3) и за системата на Клейн-Гордон-Захаров (КГЗ)

$$\begin{aligned} &u_{tt} - uxx + u + un = 0, \\ &n_{tt} - n_{xx} = \tfrac{1}{2}(|u|2)_{xx} \end{aligned} \tag{30}$$

За уравнението на Бусинеск линеаризираната задача е от вида

$$z_{tt} + 2wz_{tx} + Hz = 0, \tag{31}$$

като съответната скектрална задача

$$\lambda^2\psi + 2w\lambda\psi' + H\psi = 0, \tag{32}$$

където $H = -\partial_x L \partial_x, \;\; L = -\partial_x^2 + (1 - c^2) - f'(\varphi)$. Оператора L е от втори ред диференциален оператор, който е същия както в линеаризацията на уравнението на Кортевег-де Фриз около вълната φ_c. Тази връзка е съществена за определянето на спектралните свойства на оператора H, тъй като свойствата на оператора L са добре известни в случаите $p = 2, 3$.

За системата на (КГЗ) линеаризираното уравнение е от вида

$$\Phi_{tt} - 2c\Phi_{tx} + H\Phi = 0, \tag{33}$$

където $\Phi = \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}$,

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & A \\ A^* & H_2 \end{pmatrix}$$

и

$$H_1 = -(1 - c2)\partial_x^2 + 1 - \frac{\varphi^2}{2w}, \;\; H_2 = -w\partial_x^2$$

$$Az = \varphi z_x, \;\; A^* = -(\varphi z)_x$$

За широк клас от решения, напълно и експлиситно са описании линейната устойчивост и неустойчивост когато пертурбациите са със същия период както вълната.

8. **A. Demirkaya, S. Hakkaev, M. Stanislavova, A. Stefanov**, On the spectral stability of periodic waves of the Klein-Gordon equation, **Differential and Integral Equations**, 28(5,6)(2015), 431-454 (Q2)

Обект на излседване в тази статия е уравнението на Клейн-Гордон в $1+1$ размерности

$$u_{tt} - u_{xx} + u + |u|^{p-1}u = 0.$$

В частност, се интересуваме от спектралната устойчивост/неустойчивост на бягащи-стоящи периодични вълни от вида

$$u(t,x) = e^{wt}e^{iq(x-ct)}\varphi_{w,c}(x-ct),$$

които са cnoidal (p = 2), dnoidal (p = 3) и в по-общ вид (p = 5). Съответната линеаризирана задача за тези дву-параметрични вълни е от вида

$$v_{tt} + \mathcal{J}v_t + \mathcal{H}v = 0,$$

със съответната задача за собствените стойности

$$\lambda^2\psi + \lambda\mathcal{J}\psi + \mathcal{H}\psi = 0. \tag{34}$$

Казваме, че квадратичния сноп зададена чрез двойката $(\mathcal{J}, \mathcal{H})$ е спектрално неустойчив ако съществуват T периодична функция $\psi \in D(\mathcal{H})$ и $\lambda, \Re\lambda > 0$ такива, че

$$\lambda^2\psi + \lambda\mathcal{J}\psi + \mathcal{H}\psi = 0.$$

В противен случй казваме, че квадратичния сноп $(\mathcal{J}, \mathcal{H})$ е спектрално устойчив.

Изследванията в тази статия се основават на следната индексна формула

$$k_r + k_c + k_- = n(\mathcal{H}) - n((I - \mathcal{J}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{J})_{Ker(\mathcal{H})}))$$

където k_r е броя на положителните решения λ на (34), k_c е броя на решенията λ с ненулеви реални и имагинерни части, а k_- е броя на чисто имагинерните собствени стойности с отрицателен индекс на Крейн.

9. **A. Demirkaya, S. Hakkaev**, On the spectral stability of periodic waves for the coupled Schrodinger equations, **Physics Letters A**, 379 (2015), 2908-2914 (Q2)

В настоящата статия разлгеждаме периодични стоящи вълни за следната система на Шрьодингер

$$\begin{aligned} &iu_t + u_{xx} + (\beta|u|^4 + 2\sigma|u|^2|v|^2 + \sigma|v|^4)u = 0 \\ &iv_t + v_{xx} + (\sigma|u|^4 + 2\sigma|u|^2|v|^2 + \gamma|v|^4)v = 0, \end{aligned} \tag{35}$$

където u и v са комплексно значни функции, а β, σ, γ са реални параметри. Основната цел е изследване на съществуването и устойчивостта на периодични вълни за системата (35) от вида $u(x,t) = e^{iwt}\varphi(x)$ и $v(x,t) = e^{iwt}\psi(x)$. Интересуваме се от спектралната устойчивост на вълните когато пертурбаците са периодични със същия период както на вълните.

Линеализираната система е от вида

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix} = \mathcal{J}\mathcal{L}\begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix}, \tag{36}$$

където операторите $\mathcal{J}$ е анти симитричен а $\mathcal{L}$ е самоспрегнат. Решението Φ е спектрално неустойчива, ако съществува поне една собственна стойност λ на оператора $\mathcal{J}\mathcal{L}$ с положителна реална част. Подхода се основава на следната индексна теория. Нека $\mathcal{L}\psi_i = 0$, $\mathcal{J}\mathcal{L}\Psi_i = \psi_i$ и U е матрица с елементи $U_{ij} = \langle \mathcal{L}^{-1}\mathcal{J}\psi_i, \mathcal{J}\psi_j \rangle$. За самоспрегнатия оператор H, дефинираме броя на отрицателните собственни стойности чрез

$$n(H) = \#\{\lambda \in (-\infty, 0) \cap \sigma(H)$$

Имаме следната формула

$$k_r + 2k_c + 2k_- = n(\mathcal{L}) - n(U), \tag{37}$$

където k_r е броя на положителните решения λ на $\mathcal{J}\mathcal{L}$, k_c е броя на решенията λ с ненулеви реални и имагинерни части, а k_- е броя на чисто имагинерните собственни стойности с отрицателен индекс на Крейн.

Спектралната задача се разглежда използвайки теорията на Флоке и с помоща на численни експерименти. За числените експерименти, се разглежда дискретен вариант на системата.

10. **S. Hakkaev. M. Stanislavova, A. Stefanov**, Periodic travelling waves of the regularized short pulse and Ostrovsky equations: existence and stability, **SIAM Journal on Mathematical Analysis**, 49(1)(2017), 674-698 (Q1)

Построени са различни видове периодични движещи се вълни за уравнението на Островски/Хънтър-Сакстън/

$$(u_t + (f(u))_x)_x = u. \tag{38}$$

и за регуларизираната версия

$$u_t + \beta u_{xxx} + (f(u))_x + \epsilon \partial_x^{-1} u = 0. \tag{39}$$

За доказването на съществуването на тези вълни съществена роля играят спектралните свойства на оператора на линеаризация

$$L_+ := -\beta \partial_x^2 + c - f'(\varphi_0)$$

Теорема 2.13. *Нека f е такава, че $f \in C^2(\mathbb{R}), f(0) = 0$ и съществува четна със нулево значение решение $\varphi_0 \in L^2$ на (39) за $\epsilon = 0$. $Ker[L_+] \subset L^2_{odd}$. Тоест, ядрото на L_+ е линейна обвивка на нечетни функции и $\langle L_+^{-1}[1], 1\rangle \neq 0$.*

Тогава, съществува $\epsilon_0 > 0$ такова, че за всяко $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$, съществува функция $\varphi_\epsilon \in H^2_{0,even}$, която е решение на уравнение (39).

Също така разглеждаме устойчивоста на периодичните вълни построени в горната теорема.

Теорема 2.14. *Нека φ четно решение на (39) и оператора $L_+ = -\beta\partial_x^2 + c - f'(\varphi)$ удовлетворява условията от Теорема 2.13. Тогава, съществува $\epsilon_0 > 0$ такова, че вълните φ_ϵ съществуват за всяко $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$. Функцията φ_ϵ е четна.*

Нека оператора L_+ има една отрицателна собствена стойнст, която е проста и нулата е проста собствена стойнист (ядрото му е линейна обвивка на φ'). Тогава, ако

$$\langle L_+^{-1}[\varphi], \varphi\rangle < 0 \tag{40}$$

то вълните φ_ϵ са линейно устойчиви, за пертурбации със същия период.

За пулсовото уравнение (38), е построена фамилия от движещи се пикони. Също така е показано, че тези пикони са спектрално устойчиви.

11. **S. Hakkaev. M. Stanislavova, A. Stefanov**, Spectral stability for classical periodic waves of the Ostrovsky and short pulse models, **Studies in Applied Mathematics**, 139(3)(2017), 405-433 (Q1)

В тази статия разглеждаме пулсовото уравнение в симетричен интервал, с периодични гранични условия

$$(u_t + (f(u))_x)_x = u. \tag{41}$$

Разглеждаме спекталната устойчивост на периодични вълни за уравнението (41) от вида $u(t,x) = \varphi(x - ct)$. Уравнението за вълната φ е

$$((\varphi^{p-1} - c)\varphi_\xi)_\xi = \varphi, \quad -L \le \xi \le L. \tag{42}$$

Очевидно, (42) не е много удачно уравнение за построяване на решенията в явен вид. За да построим решенията прибягваме до следната смяна на променливите

$$\xi = \Xi(\eta) := \eta - \frac{\Psi(\eta)}{c}, \quad \varphi(\xi) = \Phi(\eta) = \Psi'(\eta). \tag{43}$$

която води до следното уравнение

$$-c^2\Phi'' - c\Phi + \Phi^p = 0. \tag{44}$$

Да отбележим, че решенията на (44) са еквивалентни на (42) когато трансформацията (43) е обратима. За $p = 2$ и $p = 3$ за Φ имаме решения в явен вид

$$\Phi = \Phi_0 + (\Phi_1 - \Phi_0)sn^2(\alpha x, \kappa), \tag{45}$$

и

$$\Phi = \Phi_2 sn(\alpha x, \kappa), \tag{46}$$

съответно. Следващата стъпка е да изведем линейната задача за решенията φ - като предполагаме, че трансформацията (43) е обратима в подходящ интервал. За целта разглеждаме пертурбацията $u(t,x) = \varphi(x - ct) + v(t, x - ct)$ и след игнориране на квадратичните термини получаваме следната линейна задача

$$(v_t + ((\varphi^{p-1} - c)v)_\xi)_\xi = v \quad - L < \xi < L. \tag{47}$$

Полагайки $v(t,\xi) = e^{\lambda t}w(\xi), w \in H^2[-L,L]$ води до следната задача за собствените стойности

$$(\lambda w + ((\varphi^{p-1} - c)w)_\xi)_\xi = w \quad -L < \xi < L. \tag{48}$$

Отново като приложим смяната (43) имаме следната задача за собствените стойности

$$-c^2 Z_{\eta\eta} - cZ + \Phi^{p-1}Z = -\lambda c Z_\eta, Z \in L^2(-M,M). \tag{49}$$

Теорема 2.15. *Вълните* (45) *са спектрално устойчиви за всички скорости* $c > 0$.

Теорема 2.16. *Вълните* (46) *са спектрално устойчиви за всички скорости* $c > 0$.

12. **S. Hakkaev, M. Stanislavova, A. Stefanov**, On the generation of stable Kerr frequency combs in the Lugiato-Lefever model of periodic optical waveguides, **SIAM Journal on Applied Mathematics**, 79(2) (2019), 477-505 (Q2)

В тази статия разглеждаме уравнението

$$iu_t + u_{xx} - u + 2|u|^2u = -i\alpha u - h, t \geq 0, -T \leq x \leq T \tag{50}$$

където u е комплексно значна функция, $\alpha > 0$ е така наречения дъмпинг параметър, а $h > 0$ е пъмпинг параметър. Интересуваме се от решения независещи от времето $u(t,x) = \varphi(x)$. Тези решения се задават чрез следното уравнение

$$-\varphi'' + \varphi - 2|\varphi|^2\varphi = i\alpha\varphi + h, -T \leq x \leq T \tag{51}$$

Целта е да изследваме съществуването и устойчивостта на решенията на уравнение (51), в физически обосновам режим $0 < h << 1$.

Твърдение 2.2. *($h = 0$) Уравнението*

$$\varphi'' - \varphi + 2|\varphi|^2\varphi + i\alpha\varphi = 0, \tag{52}$$

не притежава не тривиални решения φ_α.

В случая $\alpha = 0$ не зависещите от времето за решенията на (50), $u = \varphi(x)$ имаме следното уравнение

$$\varphi'' - \varphi + 2\varphi^3 = -h, -T \leq x \leq T \tag{53}$$

След като интегрираме веднъж, имаме

$$\varphi'^2 = -\varphi^4 + \varphi^2 - 2h\varphi - c, \tag{54}$$

където c е константа на интегриране. Решенията на (54) се задват в явен вид чрез

$$\varphi(x) = \frac{\zeta_4(\zeta_3 - \zeta_1) + \zeta_1(\zeta_4 - \zeta_3)sn^2(\frac{x}{\sqrt{g}}, \kappa)}{(\zeta_3 - \zeta_1) + (\zeta_4 - \zeta_3)sn^2(\frac{x}{\sqrt{g}}, \kappa)}, \tag{55}$$

Нека $u(t,x) = \varphi(x) + v(t,x)$, където v е комплексно значна функция. Като заместим в (50) и игнорираме всички термини от вида $O(v^2)$, имаме

$$\begin{aligned} &-v_{2t} + v_{1xx} - v_1 + 6\varphi^2 v_1 = 0 \\ &v_{1t} + v_{2xx} - v_2 + 2\varphi^2 v_2 = 0 \end{aligned}$$

Горното уравнение е от вида

$$\mathcal{J} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{+,h} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{-,h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{pmatrix}$$

където $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{+,h} &= -\partial_x^2 + 1 - 6\varphi_h^2 \\ \mathcal{L}_{-,h} &= -\partial_x^2 + 1 - 2\varphi_h^2 \end{aligned}$$

и $L_\pm := \mathcal{L}_{\pm,0}$. Въвеждаме $\mathcal{L}_h := \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{+,h} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{-,h} \end{pmatrix}$. Нека $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \to e^{\lambda t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{J}\mathcal{L}_h \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{56}$$

Проблема за устойчивост на φ_h се определя от задачата за собствените стойности (56). Казваме, че вълните са спектрално устойчиви ако (56) притежава не тривиално решение ($\vec{v} \neq 0$) , $(\lambda, \vec{v}) : \vec{v} \in H^2[-T,T]$ с $\Re\lambda > 0$.

Твърдение 2.3. *Нека $\alpha = 0$. Вълните (55) са спектрално неустойчиви решения на (50), за всички достатъчно малки $h : 0 < h << 1$.*

Теорема 2.17. *Нека α_0 е такова, че $0 < \alpha_0 < \frac{\langle 1,\varphi_0\rangle}{\|\varphi_0\|^2}$. Тогава, съществува $h_0 = h_0(\alpha_0) > 0$ така, че за всяко $h : 0 < h < h_0$ и $\alpha := \alpha_0 h$, съществува стационарно решение $\varphi_\alpha = \varphi_{\alpha,1} + i\varphi_{\alpha,2}$ на (50). Освен това, имаме следните представяния за коефициентите в Тейлоровото преставане*

$$\varphi_{\alpha,1} = (a_0 + \frac{b_0}{2}hD_2^0 + O(h^2))\varphi_0 + h\Psi_1^0 + O_{\{\varphi_0\}^\perp}(h^2) \quad (57)$$

$$\varphi_{\alpha,2} = (b_0 - \frac{a_0}{2}hD_2^0 + O(h^2))\varphi_0 + h\Psi_2^0 + O_{\{\varphi_0\}^\perp}(h^2) \quad (58)$$

където

$$a_0 = \sigma_0\frac{\|\varphi_0\|^2}{\langle 1,\varphi_0\rangle}, \quad b_0 = \alpha_0\frac{\|\varphi_0\|^2}{\langle 1,\varphi_0\rangle}, \sigma_0 = \pm\sqrt{\frac{\langle 1,\varphi_0\rangle^2}{\|\varphi_0\|^4} - \alpha_0^2};$$
$$D_2^0 = 8\frac{\langle \varphi_0^2 L_+^{-1}[1], L_-^{-1}[b_0 - \alpha_0\varphi_0]\rangle}{\langle 1,\varphi_0\rangle};$$
$$\Psi_1^0 = a_0^2 L_+^{-1}[1] + b_0 L_-^{-1}[b_0 - \alpha_0\varphi_0];$$
$$\Psi_2^0 = a_0 b_0 L_+^{-1}[1] - a_0 L_-^{-1}[b_0 - \alpha_0\varphi_0].$$

Относно устойчивостта на тези решения имаме следния резултат.

Теорема 2.18. *Нека $h, \alpha_0, \varphi_\alpha(h)$ са както в Теорема 2.17. Тогава, $\varphi_\alpha(h)$ е устойчива <u>тогава и само тогава когато</u>*

$$\sigma_0 = -\sqrt{\frac{\langle 1,\varphi_0\rangle^2}{\|\varphi_0\|^4} - \alpha_0^2}.$$

В случая на устойчивост, спектъра на оператора на линеаризация $\mathcal{J}\mathcal{L}_h$ има две реални собственни стойностиhas 0 и -2α, и останалата част от спектъра е $\{\mu : \Re\mu = -\alpha\}$. That is, it admits the description

$$\sigma(\mathcal{J}\mathcal{L}_h) \subset \{0\} \cup \{-2\alpha\} \cup \{\mu : \Re\mu = -\alpha\}.$$

В случая на неустойчивост, което е когато

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\langle 1,\varphi_0\rangle^2}{\|\varphi_0\|^4} - \alpha_0^2},$$

имаме проста неустойчива собствена стоност от вида $\mu_0\sqrt{h} + O(h)$, *където*

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{\sigma_0\|\varphi_0\|^2}{-\langle L_+^{-1}\varphi_0, \varphi_0\rangle}} > 0.$$

Съставил:..
(доц. д.м.н. Севджан Хаккъев)