ШУ „Епископ К. Преславски“

Тоня Петрова Матева

ИНФОРМАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ ЗА РЕШАВАНЕ И АНАЛИЗ НА НЕЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ И МОДЕЛИ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователна и научна степен „Доктор“
в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление 4.5 Математика, научна специалност Изчислителна математика

Научен ръководител:
Проф. д. м. н. Иван Ганчев Иванов

Шумен
2019

Дисертационният труд се състои от 148 страници.
Основен текст – 130 стр.
Брой на литературните източници – 79.
Брой на фигурите – 9.
Брой на таблиците – 23.
Брой на приложенията – 0.

Дисертационния труд е обсъден и насочен за защита от разширен съвет на катедра „Икономика и моделиране” на Шуменски университет „Епископ Константин Преславски” на 29.01.2019 г.

Докторантът работи в катедра „Математика и информатика” при Колеж – Добрич на Шуменски университет „Епископ Константин Преславски”.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 9.05.2019 г. от 14.00 ч. в зала 309 (К1) на Шуменския университет на открито заседание на научно жури.

Материалите за защитата са на разположение на интересуващите се в библиотеката на Шуменския университет.

Автор: Тоня Петрова Матева
Заглавие: Информационни технологии за решаване и анализ на нелинейни уравнения и модели
Тираж: 15 броя
Университетско издателство „Епископ К. Преславски”

Шумен, 2019 г.

Увод

Компютърната математика въвежда иновативен подход при математически и технически изчисления, улеснява, онагледява и рационализира работата в процеса на обучение и научните изследвания. Цел в тази дисертация е да покажем как с помощта на компютърната математика се анализират реални икономически явления и процеси и се извеждат сложни закономерности и връзки между участниците в тях. Как те улесняват сравнението и анализа на математическите модели за установяване на предимствата и недостатъците при налагане на конкретни условия и правила за участниците в икономическите процеси и последствията от предприетите действия. В дисертацията използваме информационните технологии и математически програми и за експерименти, свързани с изследване на нелинейни функции. Търсим прост корен на нелинейна функция с известни класически и интервални итерационни методи. С компютърните програми MATLAB и INTLAB изчисляваме брой итерации, ред на сходимост и сравняваме получените резултати по различни показатели за установяване ефективността на методите.

Актуалност и значимост на темата

Информационните технологии и компютърните математически пакети са средство да се спестят дългите и трудоемки решения и да се добие по-голяма яснота при изучаване на икономическите теории и процеси. С тяхна помощ сравняваме и анализираме итерационни методи за намиране на прост корен на нелинейна функция.

Цели и изследователски задачи

Целите, които си поставяме в настоящата дисертация са:

1. Да покажем как информационните технологии могат да се използват за анализ на математически модели в икономически приложения, след като е проведен теоретичен такъв.

2. Теоретичен анализ на математически модели с приложения в икономиката.

3. Числен анализ на итерационни методи и техни модификации за намиране на прост корен на нелинейни скаларни уравнения.

За постигане на тези цели, преминаваме през няколко изследователски етапа.

Първия етап е създаване и описание на методика с инструментите на информационните технологии, с която математическите модели стават достъпни, разбираеми и по-лесно приложими. Изследването на този етап е реализирано в първа глава на дисертацията и преминава през следните изследователски задачи: описание на икономически процеси, представени чрез математически модели. Решаване на предложени от нас примери, с помощта на инструмента Solver на MS Excel за извеждане на връзки и зависимости между тях.

Втория етап е теоретичен анализ на математически модели, описващи поведението на фирми в условията на асиметричен дуопол при наложени капацитетни ограничения. Изследването на този етап е реализирано във втора глава на дисертацията и преминава през следните изследователски задачи: анализ и сравнение на два математически модела, извеждане на условия, които гарантират устойчиво равновесие и най-добри пазарни позиции за агентите в икономическия процес.

Третият етап включва експерименти с класически и интервални итерационни методи. Изследването на този етап е реализирано в трета глава на дисертацията и преминава през следните изследователски задачи.

1. Експерименти с класически и интервални итерационни методи при наложено условие за избор на първоначално приближение.

2. Сравнение на получените резултати и отличаване на най-бързо сходящия метод.

3. Модифициране на избрани итерационни методи и формулиране на теорема и доказателство за сходимостта им.

Структура и съдържание на дисертацията

Дисертацията се състои от увод, три глави и списък на цитираната литература. Номерацията на таблиците, графиките и формулите е двойна, включваща номера на главата и поредния номер на таблицата или формулата в главата.

В текста на Автореферата сме използвали съкращението ДТ за дисертационен труд. Библиографията съвпада с тази от дисертацията и за краткост литературния списък не е включен в автореферата. Списъкът публикации по дисертационния труд е с двойна номерация, указваща поредния номер от литературния списък в дисертационния труд.

Глава 1. Модели и моделиране в микроикономиката

В първа глава на настоящия труд, представяме методика, базирана на информационните технологии, с чиято помощ решаваме математически модели на реални икономически процеси. Сложността на решенията по аналитичен начин налага използването на компютърни програми, които бързо и точно ни дават информацията, необходима за анализ и оптимизиране на икономическия процес. За да избегнем трудоемките решения и основната идея да стане по-достъпна и лесно приложима, сме се спрели на инструмента Solver на MS Excel. За да демонстрираме възможностите на инструмента Solver, сме представили два математически модела - математически модел за максимизиране на полезността и математически модел за минимизиране на разноските на база конкретен пример . Спрели сме се на тези два модела, защото между задачата за максимизиране на полезността и задачата за минимизиране на разноските съществува връзка, която подробно сме разгледали и описали в нашата публикация [6]. С помощта на информационната технология демонстрираме, че решението на задачата за минимизиране на разноските е равно на минималният доход, необходим за достигане на желано ниво на полезност при определени цени.

Пример 1: Малка фирма произвежда моливи. Нека с x_1 бележим обобщеното количеството на всички технически разходи с цена 3 единици, а с x_2 - човешкия капитал, вложен в единица готов продукт, с цена 8 единици. Бюджета, с който разполага фирмата е 900 единици. Да се намери пакета блага, в който се достига максималната полезност.

Следват математическите модели и резултата след използване на инструмента Solver.

Математически модел за максимизиране на полезността	Математически модел за минимизиране на разноските
• $v(p, m^*) = \max\limits_{<p,x>\leq m^*} u(x) =$ $= u(x^*) = u^*$	• $e(p, u^*) = \min\limits_{u(x)\geq u^*} < p, x >=$ $=< p, x^* >= m^*$
• $v(3, 8, 900) = \max(x_1^{\frac{1}{3}}.x_2^{\frac{2}{3}})$ $\begin{cases} 3.x_1 + 8.x_2 = 900 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$	• $e(3, 8, 82.55) = \min(3.x_1 + 8.x_2)$ $x_1^{\frac{1}{3}}.x_2^{\frac{2}{3}} = 82.55$
• Функция на Маршал- $x^* \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix}$	• Функция на Хикс - $h^* \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix}$
• $v(3, 8, 900) = 82, 55$	• $e(3, 8, 82.55) = 900$

Пълно описание на използваната методика може да се види в нашата статия [6].

Изводи:

1. Решението на задачата за минимизиране на разноските (това е пакетът, определен от функцията на търсенето на Хикс) е равно на минималния доход, необходим за достигане на желаното ниво на полезност при известни цени p (минимал-

ния доход се изразява чрез функцията на търсене на Маршал за подходящо ниво на полезност). Всеки пакет на търсенето x^* може да се представи или като решение на задачата за максимизиране на полезността или като решение на задачата за минимизиране на разноските.

2. Сложните математически изчисления могат да бъдат избегнати с помощта на Microsoft Excel и инструмента Solver и да облекчат изучаването и изследването на оптимизационните модели в икономическите специалности.

В раздел 1.2 на първа глава спираме вниманието си на Теорията на благосъстоянието, разгледана обстойно в източници [9], [78], [24]. Тази теория е насочена главно към определяне на механизмите за оптимално разпределение на ресурсите и оптимално разпределение на благата по потребители. Основно място в теорията за благосъстоянието има т.н. оптимум на Парето или с други думи казано, определяне ефективността на Парето в условията на съвършена конкуренция. Тук представяме Първа и Втора теорема за благосъстоянието. Доказателството на тези теореми може да се види в [10]. По-нататък в разработката построяваме математически модел, с който илюстрираме Първата теорема за благосъстоянието.

Теорема 1.2.4 [10] Първа теорема за благосъстоянието на икономиката.

Ако (x, p) е равновесие по Валрас, тогава x е ефективно по Парето.

Предлагаме математически модел, с който целим да демонстрираме смисъла на Първата теорема на икономиката за благосъстоянието. Изследвания модел се състои в:

1. Описание на поведението на потребителя в условията на съвършена конкуренция.

2. Построяване на модел.

3. Намиране равновесието на потребителя в случая на n блага с нелинейна функция на полезността.

4. Решаване на модела с предложената информационна технология и неговата икономическа интерпретация.

5. Доказателство за равновесие по Валрас и ефективност по Парето.

Пример 2. Нека на пазара се предлагат 4 вида продукти съответно с цени: количество x_1 от първия вид благо с цена $p_1 = 6$, количество x_2 от втория вид благо с цена $p_2 = 4$, количество x_3 от третия вид благо с цена $p_3 = 8$ и количество x_4 от четвъртия вид благо с цена $p_4 = 5$.
Потребителят B_1 консумира количества блага x_2 и x_3 от второ и трето благо и разполага с месечен доход от 250 лв., потребителят B_2 - количества блага x_1 и x_2 от първо и второ благо и разполага със 180 лв. Потребител B_3 предпочита блага три и четири в количества x_3 и x_4, а бюджета му е 280 лв. и потребител B_4 разполага с бюджет 300 лв. и предпочита първо, второ и четвърто благо, съответно с количества x_1,x_2 и x_4.

Разглеждаме три случая, в които предлаганото количество блага за различните стоки е различно. Предлагането се представя със следните вектори:

$$\widetilde{Y}_1 \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 180 \\ 250 \end{pmatrix}, \widetilde{Y}_2 \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 100 \\ 250 \end{pmatrix}, \widetilde{Y}_3 \begin{pmatrix} 56 \\ 78,3 \\ 117,8 \\ 196,7 \end{pmatrix}.$$

Потребителите трябва да преразпределят предлаганите количества продукти, така че да максимизират своите полезности.

$$B_1 \begin{cases} \max u(x_2, x_3) \\ u(x_2, x_3) = x_2^{\frac{1}{3}}.x_3^{\frac{2}{3}} \\ 4x_2 + 3x_3 = 250 \\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}, \quad B_2 \begin{cases} \max u(x_1, x_2) \\ u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}}.x_2^{\frac{1}{2}} \\ 5x_1 + 4x_2 = 180 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases},$$

$$B_3 \begin{cases} \max u(x_3, x_4) \\ u(x_3, x_4) = x_3^{\frac{2}{3}}.x_4^{\frac{1}{3}} \\ 3x_2 + 2x_4 = 280 \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}, \quad B_4 \begin{cases} \max u(x_1, x_2, x_4) \\ u(x_1, x_2, x_4) = x_1^{\frac{1}{4}}.x_2^{\frac{1}{4}}.x_4^{\frac{2}{4}} \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 300 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Решаваме оптимизационните модели с помощта на MS Excel и инструмента Solver. Подобни примери са разгледани в „Лекции по количествени методи” [4].

Изграждаме таблици, които представляват примерно първоначално решение на задачата, което обаче може и да не е оптималното. Посочваме величината, която трябва да бъде оптимизирана, с помощта на функцията Solver задаваме допълнителните ограничения.

В нашата статия [7] може да се види стъпка по стъпка използваната информационна технология за достигане до следното обобщение:

	B_1	B_2	B_3	B_4	$\widetilde{X}$
x_1	0	18	0	38	56
x_2	20.8	22.5	0	25	78,3
x_3	55.6	0	62.2	0	117,8
x_4	0	0	46.7	150	196,7
доход	250 лв	180 лв	280 лв	300 лв	

Общото количество търсени блага бележим с вектора $\widetilde{X} =$

$$\begin{pmatrix} 56 \\ 78,3 \\ 117,8 \\ 196,7 \end{pmatrix}.$$

Проверяваме трите случая:

В първия случай

$\widetilde{Y}_1 \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 180 \\ 250 \end{pmatrix} \geq \widetilde{X} \begin{pmatrix} 56 \\ 78,3 \\ 117,8 \\ 196,7 \end{pmatrix}$, т.е предлагането е по-голямо от търсенето и можем да кажем, че нямаме равновесие по Валрас и съответно ефективност по Парето. Във втория случай $\widetilde{Y}_2 \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 180 \\ 250 \end{pmatrix} \leq \widetilde{X} \begin{pmatrix} 56 \\ 78,3 \\ 117,8 \\ 196,7 \end{pmatrix}$, предлагането на третия продукт е по-малко от търсенето – предлаганите количества от третото благо не покриват нуждите на потребителите – нямаме ефективност по Парето. За третия случай $\widetilde{Y}_3 \begin{pmatrix} 56 \\ 78,3 \\ 117,8 \\ 196,7 \end{pmatrix} = \widetilde{X} \begin{pmatrix} 56 \\ 78,3 \\ 117,8 \\ 196,7 \end{pmatrix}$ има равенство между количествата на предлаганите блага и количествата на търсените блага. И тъй като всички потребители са направили оптимален избор, то полученото разпределение изпълнява определението за равновесие по Валрас.

Основни приноси в Глава 1

1. Представена е методика, чрез която се анализират, изследват и прилагат математически модели, описващи някои ключови процеси и явления в микроикономиката, като максимизиране на полезността и печалбата, минимизиране на разходите, равновесие по Валрас и Парето.

2. Използвана е информационна технология за представяне, решаване и анализ на тези математическите модели.

3. Демонстрирана е теорията за поведението на потребителите, с възможност за избор между n стоки с нелинейна функция на полезността. Построен е математически модел, който илюстрира и подпомага разбирането на Първата теорема на благосъстоянието.

4. Разработен е математически модел на потребление, в който се изменят цените на стоките и предпочитанията на бла-

гата, с помощта на което се изследват свойствата на модела и изучените закономерности на потребителя.

Публикациите по първа глава от дисертационния труд са [1], [2].

Глава 2. Равновесие в условията на асиметричен дуопол с наложени защитни ограничения

В тази глава изследваме поведението на фирмите и взаимоотношенията между тях в условията на дуопол, при производството и търгуването на хомогенни стоки и ефекта, който оказват наложени капацитетни ограничения върху цените, печалбата и пазарния дял. Разглеждаме специален случай на равновесие, при който единият от играчите достига максимална печалба, а другият максимизира прихода си и извеждаме нужното условие за това. Извеждаме подобно условие и за модела, предложен от авторите Breton и Zaccour в статия [20]. Правим изводи и сравнение на резултатите, за да се установи кой модел е частен случай на другия.

В раздел 2.1 разглеждаме модел, описан в статия [20]. В нея авторите анализират производството на хомогенни стоки в условията на асиметричен дуопол при наличие на конкуренция в търсенето. Моделът им включва 2 асиметрии. Първата от тях е по отношение на производителността. Предполагат, че единият от играчите максимизира своята печалба, а вторият готов да печели в твърда валута, максимизира прихода си. Втория случай на асиметрия включва защитно (капацитетно) ограничение – на втория играч не се позволява да произвежда количество по-голямо от даден процент от количеството на първия.

Този модел е абстрактен модел на модела на Европейския пазар за естествен газ през осемдесетте години. Равновесието по Курно и Стакелберг е описано и сравнено и в двата случая. Също така е направена оценка на въздействието, което оказва ограничението върху производителите и потребителите.

В раздел 2.1.1 е описанието на модела (M1). Участниците в този модел са двама и ги означаваме l и f. Нека q_i е количеството предложено на пазара от играча $i = l, f$. Функцията на разходите на играча l е $C_l(q_l)$. Нека функцията на разходите на играча f е нула, тъй като производствената цена е много незначителна в сравнение с ползите от приходите. Нека $Q = q_l + q_f$ отбелязва общото количество на пазара на двамата играчи. Нека цената се определя от обратната функция на търсенето $P = F(Q)$. Печалбата на двамата играчи е съответно за играча l – $\Pi_l(q_l, Q) = q_l F(Q) - C_l(q_l)$ и за играча f – $\Pi_f(q_f, Q) = q_f F(Q)$.

В раздел 2.1.2 характеризираме наличието на равновесие по Неш-Курно и равновесие по Стакелберг. Двойката (q_l^N, q_f^N) е равновесие по Неш-Курно, ако :

$$\Pi_l(q_l, q_f^N) \leq \Pi_l(q_l^N, q_f^N), \ \forall \gamma q_l \geq q_f^N, q_l \geq 0$$

$$\Pi_f(q_l^N, q_f) \leq \Pi_f(q_l^N, q_f^N), \ \forall \gamma q_l^N \geq q_f, q_F \geq 0.$$

Ако съществува, равновесието по Неш-Курно е сечението на функцията на реакция на двамата играчи, получено от условията за оптималност :

$$F(q_l + q_f) + q_l F''(q_l + q_f) - C_l'(q_l) + \gamma \lambda_l = 0\,,$$

$$\lambda_l \geq 0, \quad \gamma q_l - q_f \geq 0, \quad \lambda_l(\gamma q_l - q_f) = 0\,,$$

$$F(q_l + q_f) + q_f F''(q_l + q_f) - \lambda_f = 0\,,$$
$$\lambda_f \geq 0, \quad \gamma q_l - q_f \geq 0, \quad \lambda_f(\gamma q_l - q_f) = 0\,.$$

В игра на Стакелберг двойката (q_l^S, q_f^S) е равновесна точка, ако:

$$\Pi_l(q_l, q_f^S(q_l)) \leq \Pi_l(q_l^S, q_f^S(q_l)), \quad \forall q_l \geq \underline{Q}$$

$$q_f^S(q_l) \in argmax\,\{\Pi_f(q_l, q_f) : \gamma q_l \geq q_f \geq 0\}\,.$$

Ако съществува, равновесието по Стакелберг, е точка от тангентата на функцията на реакция на последователя (играч f) с ниво кривата на лидера (играч l).

В раздел 2.1.3 разглеждаме линейно-квадратичен случай, модел с линейна функция на търсенето и квадратични разходи, за да се илюстрира ефектът от ограничението за сигурност:

$$P(Q) = \begin{cases} 1 - Q, \text{ако} & 0 \leq Q \leq 1 \\ 0, \text{в другия случай} & \end{cases}$$

$C_l(q_l) = \omega q_l + \frac{1}{2}\delta q_l^2$, където ω и δ са положителни параметри и $2\omega < 1$.

В раздел 2.1.4 е разгледано равновесие по Неш-Курно в линейно-квадратичен случай с и без наложени капацитетни ограничения. Направено е сравнение в двата разглеждани случая.

Предвид предположението, че защитното ограничение е активно, играчите следват следният оптимизационен проблем:
$\max_{q_f \geq 0} \Pi_l(q_l, q_f) = q_l(1 - q_l - q_f) - \omega q_l - \frac{1}{2}\delta q_l^2, \quad s.t \;\; \gamma q_l \geq q_f.$
$\max_{q_l \geq 0} \Pi_f(q_l, q_f) = q_f(1 - q_l - q_f), \quad s.t \;\; \gamma q_l \geq q_f.$

Ако се предположи, че съществува решение, необходимите и достатъчни условия за Неш-Курно равновесието, са следните:

$1-2q_l-q_f-\delta q_l-\omega+\gamma\lambda_l=0 \quad 1-q_l-2q_f-\lambda_f=0,$
$\lambda_l \geq 0, \quad \gamma q_l-q_f \geq 0, \quad \lambda_l(\gamma q_l-q_f) \geq 0,$
$\lambda_f \geq 0, \quad \gamma q_l-q_f \geq 0, \quad \lambda_f(\gamma q_l-q_f) \geq 0.$

В случая без ограничения в капацитета, равновесните условия са: $1-2q_l-q_f-\delta q_l-\omega=0, \quad 1-q_l-2q_f=0.$

И равновесните количества са:

$$q_l^{Nu}=\frac{1-2\omega}{3+2\delta}>0,\ q_f^{Nu}=\frac{1+\delta+\omega}{3+2\delta}>0. \tag{1}$$

В раздел 2.1.4.3 се сравняват цени и количества в долната граница на интервала в

$$q_l^{Nc} \in \left[\frac{1-\omega}{2+\gamma+\delta}, \min\frac{2(1-\omega)}{2+2\gamma+\delta}, \frac{1}{2\gamma+1}\right] \tag{2}$$

$$q_f^{Nc}=\gamma q_l^{Nc},$$

в ограничения случай, с цени и количества в единственото равновесие по Неш-Курно в случая без ограничения. Тази долна граница е единственото устойчиво равновесие по Неш-Курно, когато $\gamma \geq \frac{\delta+2\omega}{1-2\omega}$, което може да се случи, ако $\omega<1$ и $\frac{\delta}{1-4\omega} \leq 1$. Използват се следните резултати, получени чрез прости изчисления от (2) и (1).

Игра на Неш-Курно с ограничения:

$$q_l^{Nc}=\frac{(1-\omega)}{2+\gamma+\delta},\ q_f^{Nc}=\gamma\frac{1-\omega}{2+\gamma+\delta},$$

$$Q^{Nc}=\frac{(1-\omega)(1+\gamma)}{2+\gamma+\delta},\ P^{Nc}=\frac{(1+\delta)+\omega(1+\gamma)}{2+\gamma+\delta},$$

$$\Pi_l^{Nc}=\frac{(1-\omega)^2(2+\delta)}{2(2+\gamma+\delta)^2},\ \Pi_f^{Nc}=\gamma(1-\omega)\frac{(1+\delta)+\omega(1+\gamma)}{(2+\gamma+\delta)^2}.$$

Игра на Неш-Курно без ограничения:

$$q_l^{Nu} = \frac{1-2\omega}{3+2\delta},\ q_f^{Nu} = \frac{1+\delta+\omega}{3+2\delta},$$

$$Q^{Nu} = \frac{2+\delta-\omega}{3+2\delta},\ P^N u = \frac{1+\delta+\omega}{3+2\delta},$$

$$\Pi_l^{Nu} = \frac{(1-2\omega)^2(2+\delta)}{(2(3+2\delta)^2}),\ \Pi_f^{Nu} = \frac{(1+\delta+\omega)^2}{(3+2\delta)^2}.$$

Ограничаването на най-ефективния играч (играч f , който има нулеви продуктивни разходи) позволява играч l да увеличи производството си докато запазва общото количество по-ниско, отколкото в случая без ограничения. Поради това цената е по-голяма и играчът l реализира по-голяма печалба в случая с ограничения. За играча f е обратното.

В раздел 2.1.5 е разгледано равновесие в игрови модел на Стакелберг със и без наложени капацитетни ограничения. Допускайки, че са наложени ограничения (раздел 2.1.5.1 от ДТ), играчите трябва да решат следните оптимизационни проблеми:

$$\max_{q_f \geq 0} \Pi_f(q_l, q_f) = q_f(1-q_l-q_f), \quad s.t.\ \gamma q_l \geq q_f,$$

$$\max_{q_l \geq 0} \Pi_l(q_l, q_f) = q_l(1-q_l-q_f(q_l)-\omega) - \frac{1}{2}\delta q_l^2.$$

Равновесието по Стакелберг трябва да изпълнява следните необходими и достатъчни условия:

$q_f = \frac{1-q_l-\lambda}{2} \quad \lambda \geq 0,\ \gamma q_l \geq q_f,\ \lambda(\gamma q_l - q_f) = 0$

$q_l = \frac{1+\lambda-2\omega}{2(1+\delta)}.$

В раздел 2.1.5.2 се разглежда равновесие по Стакелберг без ограничения.

Без ограничния, равновесните условия се достигат при количества:

$$q_f = \frac{1-q_l}{2}, \quad q_l = \frac{1-2\omega}{2(1+\delta)}.$$

Вижда се, че единственото равновесие по Стакелберг е :

$$q_f^{Su} = \frac{1+2\delta+2\omega}{4(1+\delta)}, \quad q_l^{Su} = \frac{1-2\omega}{2(1+\delta)}.$$

Резултатите могат да се обобщят (раздел 2.1.5.3):

Игра на Стакелберг с ограничения:

$q_l^{Sc} = \frac{2(1-\omega)}{3+2\gamma+2\delta}, \quad q_f^{Sc} = \frac{2\gamma(1-\omega)}{3+2\gamma+2\delta}.$

$Q^{Sc} = \frac{2(1-\omega)(1+\gamma)}{3+2\gamma+2\delta}, \quad P^{Sc} = \frac{1+2\delta+2\omega(1+\gamma)}{3+2\gamma+2\delta}.$

$\Pi_l^{Sc} = \frac{2(1-\omega)^2(1+\delta)}{(3+2\gamma+2\delta)^2}, \quad \Pi_f^{Sc} = \frac{(1-\omega)2\gamma((1+2\delta)+2\omega(1+\gamma))}{(3+2\gamma+2\delta)^2}.$

Игра на Стакелберг без ограничения:

$q_l^{Su} = \frac{1-2\omega}{2(1+\delta)}, \quad q_f^{Su} = \frac{1+2\delta+2\omega}{4(1+\delta)}.$

$Q^{Su} = \frac{(3-2\omega+2\delta)}{4(1+\delta)}, \quad P^{Su} = \frac{(1+2\delta+2\omega)}{4(1+\delta)}.$

$\Pi_l^{Su} = \frac{(1-2\omega)^2}{8(1+\delta)}, \quad \Pi_f^{Su} = \frac{(1+2\delta+2\omega)^2}{16(1+\delta)^2}.$

В раздел 2.1.6 е направено сравнение на равновесието по Неш-Курно и Стакелберг.

Въвеждането на ограничения за сигурност в условията на пазар, в който се наблюдава поведение тип Курно, може да доведе до ситуация, в която няма устойчиво равновесие на Наш-Курно. Освен това е разумно да се предположи, че въвеждането на такова ограничение би могло да предизвика поведение тип Стакелберг, с играч l предлагащ своята продукция и следователно горната граница на продукцията на другите играчи и играч f, се приспособява към него. Разглеждането на линейно-квадратичния случай завършва с оценка на ефекта от въвеждането на ограничение за сигурност като се сравнят резултатите в равновесния модел на Неш-Курно без ограничение с резултатите от равновесния модел на Стакелберг без ограничение.

В раздел 2.1.7 е направен анализ на модел М1. Могат да се обобщят следните резултати:

1. Налице е пространство от равновесия по Неш-Курно и във всеки случай сигурното ограничение е активно.

2. Равновесието по Стакелберг съществува. Независимо дали ограничението е активно или не, то зависи от еластичността на търсенето.

За линейно-квадратичния модел, най-важните наблюдения са следните:

1. Съществува пространство от равновесия по Неш-Курно, но равновесието се достига при някои условия (например, когато ограничения дял е сравнително голям, предвид производствените разходи), само едно от тях е устойчиво (т.е в такова равновесие двамата играчи правят по-голяма печалба).

2. Равновесието по Стакелберг е единствено.

3. Разпределянето на дажбата на най-ефективния играч (играч f който има нулеви разходи) е в ущърб на потребителите. В действителност и при двата модела – на Неш-Курно и Стакелберг, има загуба на потребителски излишък, предвид липсата на разпределяне на дажби.

4. В двата игрови модела, ограниченията ощетяват игра-

ча f и награждават играча l. Следователно, играча f прави по-малка печалба в ограничената игра, отколкото в другата. Обратното е валидно за играча l.

Играта се променя с въвеждането на ограничение, тогава линейно квадратичния модел показва, че:

1. Продаденото количество от най-ефективния играч (играч f) намалява, докато количеството на другият расте.

2. Общото количество намалява (а цената ще расте), ако ограничаващия процент е достатъчо малък предвид продуктивната цена.

3. Базирайки се на тези резултати (загуба на потребителски излишък, растежа на печалбата на играча l и намаляне на печалбата на играча f), може да се направи извод, че предложеното ограничение наистина ще наказва играч f, но ще награди играч l и всичко това за сметка на потребителя.

В раздел 2.2 е разгледан обобщен модел (М2), представен от авторите Иванов и Матева в статия [40]. Това е дуополен, асиметричен модел на хомогенни стоки с функция на търсенето $D = A - bp$, където A е известна константа, която може да се промени по всяко време, а $b > 0$ е търсенето, отговарящо на цената. Ограничението, което налагат е $q_f \leq \gamma q_l$ и $\gamma \in [\frac{1}{2}, 1]$. Равновесната цена е определена от решението на уравнението $A - bp = q_l(p) + q_f(p)$, т.е

$$P = F(Q) = F(q_l + q_f) = \frac{1}{b}(A - q_l - q_f).$$

Разходите за производство на първия играч $C_l(q_l) = \frac{1}{2}\delta q_l^2 + wq_l$, където $\delta \geq 0$ и $w > 0$ и $2wb < A$. Разходите на играча f са нула. Играчът f се старае да максимизира своята печалба.

Предполагаме, че разходите му за незначителни, в сравнение с печалбата от дейността.

Печалбата на двамата играчи се представя чрез следните означения:

$$\Pi_l(q_l, Q) = q_l F(Q) - C_l(q_l), \quad \Pi_f(q_f, Q) = q_f F(Q).$$

В раздел 2.2.2.1 разглеждаме игровия модел на Курно с ограничения. Тук двамата играчи решават оптимизационния проблем:

$$max_{q_l} \Pi_l(q_l, q_f) = q_l \frac{1}{b}(A - q_l - q_f) - wq_l - \frac{1}{2}\delta q_l^2,$$

$$max \Pi_f(q_l, q_f) = q_f \frac{1}{b}(A - q_l - q_f),$$

със следните ограничения:

$$\gamma q_l \geq q_f, \qquad q_l \geq 0, \qquad q_f \geq 0, \qquad \gamma \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Определение 2.2.2 Двойката (q_l^C, q_f^C) е равновесие по Неш-Курно, ако $\Pi_l(q_l, q_f^C) \leq \Pi_l(q_l^C, q_f^C)$, за всяко q_l такова, че $q_l \geq 0$, $\gamma q_l \geq q_l^C$ и $\Pi_f(q_l^C, q_f) \leq \Pi_f(q_l^C, q_f^C)$, за всяко $q_f \geq 0 \gamma q_l^C = q_f$.

На база разсъжденията дотук, можем да запишем следната теорема, която се намира в нашата публикация [40]:

Теорема 2.2.3 [40] дефинира равновесната точка в този игрови модел:

$$q_l^C \in \left[\frac{A - wb}{2 + \gamma + \delta b}, \frac{2(A - wb)}{2 + 2\gamma + \delta b}\right],$$

$$q_f^C = \gamma q_l^C.$$

Със следващата теорема се извежда условие за специален случай разгледан в нашата статия [40], при който равновесието е устойчиво и най-добро за двамата играчи. Играчът l достига максимална печалба в долната граница на интервала, а играчът f максимизира прихода си:

Теорема 2.2.4 [40] Ако $\frac{4wb}{1-\delta b} \leq A$, тогава играчът l трябва да има q_l^{C*} с $\gamma = \widehat{\gamma}$. А отговарящото количество на играчът f е $\widehat{q}_f^{C*}$ за $\widehat{\gamma}$. Това дава резултат в специалния случай на равновесие

$$\widehat{Q}^{C*} = q_l^{C*} + \widehat{q}_f^{C*} = Q^{C*}(\widehat{\gamma}) = \frac{A}{2}, \widehat{P}^{C*} = \frac{1}{b}(A - \widehat{Q}^{C*}) = \frac{A}{2b},$$

$$\widehat{\Pi}_l^{C*}=\Pi_l^{C*}(\widehat{\gamma})=\frac{(A-2\omega b)^2(2+\delta b)}{8b(1+\delta b)}, \widehat{\Pi}_f^{C*}=\Pi_f^{C*}(\widehat{\gamma})=\frac{A(Ab\delta+2b\omega)}{4b(1+b\delta)}.$$

В раздел 2.2.2.2 се разглежда модела на Курно без ограничения. Като изключим допълнителните ограничения в модела на Курно, равновесната точка за двамата играчи се задава с :

$$q_l^* = \frac{A-2\omega b}{3+2\delta b} = q_l^{Cu*}, \qquad q_f^* = \frac{A+Ab\delta+\omega b}{3+2\delta b} = q_f^{Cu*}.$$

Пресмятаме цени, количества и печалба:

$$Q^{Cu*} = q_l^{Cu*} + q_f^{Cu*} = \frac{2A+Ab\delta-\omega b}{3+2\delta b}, p^{Cu*} = \frac{A+Ab\delta+\omega b}{b(3+2\delta b)}$$

$$\Pi_l^{Cu*}=\Pi_l(q_l^{Cu*}, q_f^{Cu*})=\frac{(A-2\omega b)^2(2+\delta b)}{2b(3+2\delta b)^2}, \Pi_f^{Cu*}=\frac{(A+Ab\delta+b\omega)^2}{b(3+2b\delta)^2}.$$

В раздела сме сравнили цени, количества и печалби в долната граница на интервала в случая с ограничения, където уникалното равновесие по Неш-Курно е достигнато, със случая без ограничения. Това може да стане само, ако $A - 2\omega b > 0$ и $\gamma < \frac{A\delta b+2\omega b}{2(A-2\omega b)}$.

Равновесната точка за двамата играчи в този случай се задава с:

$$q_l^* = \frac{A - 2\omega b}{3 + 2\delta b} = q_l^{Cu*}, \qquad q_f^* = \frac{A + Ab\delta + \omega b}{3 + 2\delta b} = q_f^{Cu*}.$$

Използваме някои прости изчисления, базирани на получените по-горе резултати.

Теорема 2.2.5 [40] Когато $A - 2\omega b > 0$, $1 - \gamma > 0$ и $\gamma < \frac{A\delta b + 2\omega b}{2(A - 2\omega b)}$, следващите резултати за пазара се достигат:

1. Количеството продажби и печалбата за играча l са по-големи в случая с ограничения, отколкото в случая без ограничения на Неш- Курно: $q_l^{C*} - q_l^{Cu*} > 0, \quad \Pi_l^{C*} - \Pi_l^{Cu*} > 0$.

2. Доходът на играча f е по-голям отново в случая с ограничения, в сравнение със случая без ограничения, но количеството продажби в този случай е по-малко отколкото в случая без ограничения: $\Pi_f^{C*} - \Pi_f^{Cu*} > 0, \quad q_f^{C*} - q_f^{Cu*} < 0$.

3. Общата пазарна цена и за двамата играчи е по-голяма в случая с ограничения: $p^{C*} - p^{Cu*} > 0$.

4. Общото количество продажби за потребителите в случая с ограничения е по-малко от количеството продажби в случая без ограничения на Неш-Курно: $Q^{C*} - Q^{Cu*} < 0$.

Доказателство на теоремата може да се види на стр. 68 от ДТ.

В раздел 2.2.2.3 разглеждаме модел на Стакелберг с ограничения. При допуснатите ограничителни условия, трябва да се решат следните оптимизационни задачи в модела на Стакелберг :

$\max_{q_l} \Pi_l(q_l, q_f) = q_l \frac{1}{b}(A - q_l - q_f(q_l)) - \omega q_l - \frac{1}{2}\delta q_l^2$.

$\max_{q_f} \Pi_f(q_l, q_f) = q_f \frac{1}{b}(A - q_l - q_f)$, където $\gamma q_l \geq q_f$, $q_l \geq 0$,

$q_f \geq 0,\ \gamma \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$

В раздел 2.2.2.4 разглеждаме модел на Стакелберг без ограничения. Двамата играчи трябва да максимизират печалбата си:

$\Pi_l = q_l \frac{1}{b}(A - q_l - q_f - \omega b) - \frac{1}{2}\delta q_l^2,$

$\Pi_f = q_f \frac{1}{b}(A - q_l - q_f).$

Използвайки условията от първи ред за максимизирането на печалбата, намираме за лидера и последователя съответните количества:

$$\begin{array}{rcccc} q_l & = & \frac{A-2\omega b}{2(1+\delta b)}, & & \\ q_f & = & \frac{A-q_l}{2} & = & \frac{A+2A\delta b+2\omega b}{4(1+\delta b)} \end{array}$$

Пресмятаме и стойностите на продадените количества на двамата играчи, техните печалби, цената на пазара и количеството в случая без ограничение.

В раздел 2.2.2.5 сравняваме равновесието по Стакелберг в случая с ограничения и в случая без ограничения.

Използваме резултатите от направените изчисления за пазара, описани в раздела, за да направим някои прости изчисления.

Теорема 2.2.8 [40] Предвид, че $\frac{A+2A\delta b+2\omega b}{2(A-2\omega b} > \gamma$, стигаме до следните резултати за сравнението:

1. Количеството продажби на играча l е повече в случая с ограничение. Но от друга страна за играчът f е по-малко: $q_l^{Sc} - q_l^{Su} > 0, \quad q_f^{Sc} - q_f^{Su} < 0.$

2. Общата пазарна цена е по-голяма в случая с ограничение – $p^c - p^u > 0.$

3. Продаденото количество и за двамата играчи е по-малко

в случая с ограничения на Стакелберг, отколкото в другия случай – $Q^c - Q^u < 0$.

4. Печалбата на лидера е по-голяма в случая с ограничение, а печалбата на последователя е по-малка – $\Pi_l^{Sc} - \Pi_l^{Su} > 0, \quad \Pi_f^{Sc} - \Pi_f^{Su} < 0$.

Доказателство на теоремата може да се види на стр. 72 отт ДТ.

В раздел 2.2.3. на ДТ сравняваме равновесието в специален случай на игрови модел на Курно. В този раздел ще сравним цени, количества и печалби в случая с ограничения, където единственото равновесие по Неш-Курно се достига и играчът f максимизира своят доход, а играчът l достига максимално възможната печалба в границите на интервала, заедно със случаят без ограничения. Това може да стане само, ако $\frac{4wb}{1-\delta b} \leq A$. Оново използваме същата опростена процедура, базирана на резултатите посочени по-горе.

Теорема 2.2.9 [40] Ако $\frac{4wb}{1-\delta b} \leq A$ и $\gamma = \widehat{\gamma}$, пазарните характеристики са :

1. Количеството продажби и достигнатата печалба на играча l са по-големи в игровия модел на Неш-Курно с ограничение, в сравнение с модела без ограничение: $q_l^{C*} - q_l^{Cu*} > 0, \ \widehat{\Pi}_l^{C*} - \Pi_l^{Cu*} > 0$.

2. Доходът на играча f е по-голям в случая с ограничение, но количествата продажби в този случай са по-малки, в сравнение с модела без ограничение: $\widehat{\Pi}_f^{C*} - \Pi_f^{Cu*} > 0, \quad \widehat{q}_f^{C*} - q_f^{Cu*} < 0$.

3. Общата пазарна цена и за двамата играчи е по-голяма в случая с ограничение: $\widehat{p}^{C*} - p^{Cu*} > 0$.

4. Общото количество продажби на потребителите в слу-

чая с ограничение е по-малко отколкото в случая с липсващо ограничение: $\widehat{Q}^{C*} - Q^{Cu*} < 0$.

Доказателството на теоремата може да се види на стр. 74 от ДТ.

В раздел 2.3 на Глава 2 сме направили сравнение на модели М1 и М2 за равновесие по Неш-Курно.

И за двата модела М1 и М2 са в сила следните изводи:

1. Съществува пространство от равновесия по Неш-Курно, когато е в сила капацитетно ограничение.

2. Съществува единствено равновесие, когато няма наложени ограничения.

3. При различни условия за γ, продажбите и печалбата на играча l са по-големи в случая с ограничения, а количеството продажби на f са по-малки.

4. Общото количество продажби и за двата модела е по-малко в случая с ограничения.

5. И в двете статии ограниченията не са в полза на потребителя.

Авторите на статия [20] установяват, че печалбата на f е по-малка в случая с ограничение (това е максималната печалба на f, за да съществува устойчиво равновесие), докато в нашата статия [40] доказваме, че прихода на f е по-голям в случая с ограничение. В [40] анализираме и общата пазарна цена, която е по-голяма в случая с ограничения.

В раздел 2.4 е направено сравнение между модел М1 и модел М2 по отношение на равновесие по Стакелберг.

И за двата модела М1 и М2 са в сила следните изводи:

1. Съществува единствено равновесие и в двата случая, с

ограничение и без ограничение.

2. Количествата продажби и печалбата на l са по-големи в случая с ограничения, докато продажбите на f и печалбата са по-малки.

3. Общото количество продажби е по-малко в случая с ограничения, но общата пазарна цената е по-голяма.

4. Ограниченията не са в полза на потребителя.

Основните приноси в Глава 2

1. Изследвано е поведението на фирмите и взаимоотношенията между тях в условията на дуопол, при производството и търгуването на хомогенни стоки и ефекта, който оказват наложени капацитетни ограничения върху цените, печалбата и пазарния дял.

2. Изследвани са методи и подходи за намиране и анализ на равновесно състояние в моделите на Курно и Стакелберг и как наложените, най-често капацитетни ограничения влияят върху фирмения размер, цените и взаимоотношението между фирмите на пазара.

3. Разгледан е специален случай, при който единият от играчите достига максимална печалба в долната граница на интервала, а другият максимизира прихода си. Извежда се нужното условие за това. Изведено е подобно условие и за модела, предложен от Breton и Zaccour в статия [20].

4. Направено е сравнение на резултатите, за да се установи кой модел е частен случай на другият.

Публикацията по втора глава от дисертационния труд е [3].

Глава 3 Сравняване на итерационни методи за решаване на нелинейни уравнения

В тази глава изследваме класически и интервални итерационни методи за намиране на реален корен на нелинейно уравнение. За прилагане на съответните методи използваме първоначални приближения, които отговарят на условия Нютонов тип. Следва описание на избраните класически итерационни схеми и експерименти с тях, като първоначалните приближения, които сме избрали са съобразени с наложените условията. Във втората част на трета глава сме представили интервални модификации на известни класически итерационни схеми. За всяка предложена от нас модификация сме извели теорема, доказваща сходимостта на метода. С новите модификации сме направили експерименти, които са описани в статии [49] и [50].

Най-известната итерационна формула е формулата на Нютон, получена чрез квадратурната формула на Нютон-Коутс от ред нула (правилото на правоъгълника). Тя е с ред на сходимост 2. За подобряване реда на сходимост и броя итерации, много автори са модифицирали формулата на Нютон и разработили различни итерационни схеми с помощта на различни техники. Chun например, предлага итерационна формула, получена чрез разлагане в ред на Тейлър [22], [24], а посредством формулата на Симпсън, авторите на статия [35] получават нова итеративна схема с ред на сходимост 3. Друг подход е използван от Homeier [39], който използва обратната функция $x = f(y)$, вместо $y = f(x)$ от Нютоновата теорема и получава модификация с ред на сходимост 3. Друга техника за нови итерационни схеми е хомотопия, подробно описан подход в статията на Noor в [60] и [73]. С различни методи на разлагане се получават нови итерационни формули с кубичен и квадратичен ред на сходимост [41], [38], [29], [64]. За някои от тези итерационни схеми се налага изчисляване на втора и трета производна.

Важен момент при намиране на корените на нелинейно уравнение е изборът на първоначално приближение. В изброените по-горе статии авторите не са наложили условия за избор на първоначално приближение. Нашата цел е да изследваме методите, като наложим условия за първоначалното приближение.

Тъй като всеки от методите, с които правим експерименти, е модификация на Нютоновия метод, ние изследваме и сравняваме тези методи като избираме първоначални приближения, които отговарят на следните условия от Нютонов тип:

1. Изследваме функциите в интервал $[a, b]$, за който имаме $f(a).f(b) < 0$, което гарантира наличието на корен в съответния интервал.

2. Изискваме в съответния интервал, първата и втора производна да са непрекъснати за $\forall x \in [a, b]$: $f'(x) \neq 0$ и $f''(x) \neq 0$.

3. За първоначално приближение използваме този край на интервала, за който $f(x_0).f''(x_0) > 0$.

Тези наложени условия, стесняват интервала, в който можем да изследваме функцията и ограничават избора ни на начално приближение. Целта ни е да анализираме поведението на методите, когато са наложени ограничения Нютонов тип и да отличим най-бързо сходящия и стабилен метод. С помощта на компютърната програма Matlab изчисляваме реда на сближаване и итерациите, необходими на всеки метод за намиране на корена, съдържащ се в избрания интервал и сравняваме получените резултати.

В раздел 3.1 описваме класически итерационни методи, с които сме направили експерименти описани в статии [46], [47] и [48]. В параграф 3.1.10 прилагаме получените резултатите и правим сравнение по брой итерации и скорост на сходимост.

В главата са представени експерименти със следните итерационни методи:

1. Метод на Хасанов, Иванов и Неджибов [35].

2. Методи на Farooq [27]:

– Алгоритъм 6(F1),

– Алгоритъм 7(F2),

– Алгоритъм 8(F3).

3. Метод на Halley [77].

4. Метод на Frontini и Sormani [29].

5. Метод на Chun [22].

6. Метод на Weerakoon и Fernando [70].

7. Метод на Homeier [38].

8. Метод на Kou [41].

9. Метод на Potra–Pták [65].

С тези методи изследваме следните нелинейни функции:

$f_1(x) = e^{x^2+7x-30} - 1,\ \alpha = 3,00000e + 00.$

$f_2(x) = x - e^{-x},\ \alpha = 5,6714329e - 01.$

$f_3(x) = (x^2 + 5x + 2).e^{-x} + 1,\ \alpha = -4,55901131e + 00.$

$f_4(x) = 0.5e^{x} - 5.x + 2,\ \alpha = 3,401795803e + 00.$

$f_5(x) = (x + 2)e^{x} - 1,\ \alpha = -4,428544e - 01.$

$f_6(x) = e^x - 4x^2,\ \alpha = 4,306584e+00 \quad \alpha = -4,077767094044e-01.$

$f_7(x) = x^2 - e^{-x} - 3x + 2,\ \alpha = -2,99223e+00, \quad \alpha = 2,109356e+00.$

$f_8(x) = (x-1)^3 - 1,\ \alpha = 2,00000e+00.$

$f_9(x) = xe^x - 1,\ \alpha = 567,143290e-003.$

Всяка функция е изследвана с първоначални приближения, които отговарят на условията, описани по-горе.

Всички изчисления са направени с помощта на компютърна програма Matlab (R2016a). Търсената точност е $tol = 10e-15$.

За стоп критерии използваме 2 условия:

1. Абсолютната стойност на функцията от намереният приближен корен трябва да е по-малка от зададената точност $|f(x_n)| < tol$.

2. Абсолютната стойност на разликата на последното и предпоследното приближение $|x_n - x_{n-1}| < tol$.

Числени експерименти - първа част

Първата серия експерименти са описани в детайли в статия [46](в процес на рецензия). В нея сме описали експериментите със следните методи:

1. Методи на Farooq [27]:

– Алгоритъм 6(F1),

– Алгоритъм 7(F2),

– Алгоритъм 8(F3).

2. Метод на Хасанов, Иванов и Неджибов [35].

3. Метод на Halley [77].

4. Метод на Frontini и Sormani [29].

С тези методи изследваме 9 функции с различни първоначални приближения, отговарящи на условията, които сме наложили. Тук ще опишем експеримента само с функция $f_1(x)$ и резултатите от него.

Разглеждаме функцията $f_1(x) = e^{x^2+7.x-30} - 1$ в интервала $[-2, 5]$, в който коренът е $\alpha = 3,00000e+00$. Тази функция има 2 реални корена, един от които е $x_n = 3,00000e+00$. Той е ограничен от ляво от първа и втора производна, а от дясно, след корена, функцията и втората и производна имат положителни знаци, което удовлетворява условията, описани по-горе и ни дава възможност да намерим първоначално приближение, при което някой от методите е по-бързо сходящ. И при трите първоначални приближения, с най-малък брой итерации е методът на Halley, като отдалечавайки се от корена, разликата в броя итерации расте и стойността на функцията $|f(x_n)|$ е 0. И при по-ниска точност $10e-10$ с първоначално приближение $x_0 = 5$, методът на Halley достига с точност корена с 18 итерации и отново е по-бързо сходящ от останалите методи. Резултатите от експеримента могат да се видят в Таблица 3.1 от ДТ (стр.80).

На база резултатите от експериментите с всички 9 функции, можем да направим следните изводи:

1. Метода на Halley е най-бързо сходящ.

2. На второ място можем да наредим методът на Хасанов. Броя итерации, които прави е близък до броя итерации на методи F2 и F3, но реда на сходимост е 3 - по-малка от тази на двата метода и не изисква изчисляване на втора производна, както метод F2.

3. Метод F1 прави най-голям брой итерации, за да достигне корена.

Числени експерименти – втора част

Следващите експерименти са описани в статия [47], изпратена за рецензия в списание „Thai Journal of Mathematics”.

Сравняваме следните методи:

1. Метод на Chun [22].
2. Метод на Weerakoon и Fernando [70].
3. Метод на Homeier [38].
4. Метод на Kou [41].
5. Метод на Potra–Ptáḱ [65].

С тези методи сме изследвали 5 от функциите представени по-горе. Тук ще представим резултатите от експеримента с една от функциите, а останалите експерименти могат да се видят в ДТ, стр. 86 – 93.

Разглеждаме нелинейна функция $f_8(x) = (x-1)^3 - 1$ в интервала $(1, +\infty)$, в който се намира коренът $\alpha = 2,00000e+00$. Използвайки графичния метод намираме, че уравнението има един реален корен в интервала $(1, +\infty)$. Предвид условията за начално приближение, избираме такова в дясно на оста Ox, след корена, където функцията и нейната втора призводна имат един и същ знак. Таблица 3.13 на стр. 92 от ДТ представя експериментите с три първоначални приближения, отговарящи на условията описани по-горе. С тях методът на Homeier прави най-малък брой итерации, а метод Chun1 най-голям брой. Избирайки точка за първоначално приближение, лежаща на оста Ох и намираща се по-далеч от корена, разликата в броя итерации и на двата метода се увеличава.

Експериментите с останалите функции са описани по аналогичен начин и на база резултатите можем да направим следните изводи:

1. Метода на Homeier прави най-малък брой итерации.

2. Метод Chun1 прави най-голям брой итерации.

3. Методи Kou, WF и Potra–Ptáќ правят един същ брой итерации.

Числени експерименти - трета част

Следващите експерименти са описани в нашата статия [48].

Спрели сме се на 5 функции, които имат непрекъснати първа и втора производна в изследвания интервал $[a, b]$, в който търсим корен. Началното приближение - x_0 е този край на интервала $[a, b]$, за който $f(x_0).f''(x_0) > 0$. Сравняваме следните методи:

1. Метод на Farooq (F2) [27].

2. Метод на Halley [77].

3. Метод на Homeier [38].

4. Метод на Kou [41].

Метод F2 и метода на Halley изискват изчисляване на втора производна. Метода на Homeier, метода на Kou и метода на Halley са с ред на сходимост 3. Метод F2 е с ред на сходимост 4.

Таблица 3.15 на стр. 95 от ДТ представя експериментите с функцията $f_4(x) = 0.5.\exp^x -5.x + 2$ в интервал $[2, 12]$, в който се намира корена $x_n = 3,401795803e + 00$. Търсим началните приближения вдясно от корена, където графиката на функцията и на втората и производна минават над оста и приемат положителен знак.

Експериментите с останалите функции са описани по аналогичен начин на стр. 95 – 98 от ДТ и на база резултатите от тях можем да направим следните изводи:

1. При сравнение на двата метода неизискващи изчисляване на втора производна, метода на Homeier прави по-малко итерации от метода на Kou.

2. При сравнение на другите два метода, метода на Halley е по-бързо сходящ от метод F2 предложен от Ahmed Shah Farooq в статия [27].

3. Метода на Kou е с най-голяма точност.

Интервални итерационни методи

Наред с класическите итерационни методи за решаване на нелинейни уравнения се използват и интервални итерационни методи. Интервалния анализ е подробно описан от Moore [54]. В статия [17], авторите описат итерационни формули предложени от Островски [33] и базирайки се на Нютоновия интервален метод, предлагат интервална модификация на тези класически итерационни схеми.

Предлагаме интервална модификация на някои известни итерационни методи и извеждаме теореми, доказващи тяхната сходимост. С новите модификации правим експерименти с компютърната програма Matlab и интервалното приложение INTLAB. Новите интервални схеми сравняваме с интервалната схема на Нютон и схемите, описани в статия [17]. Разглеждаме функциите, описани в статиите [17], [77], за да сравним до колко методите, които предлагаме са ефективни.

Като база за нашето изследване използваме методите, разглеждани в статия [17]. В нея са представени интервалните методи на Нютон, на Островски и модифицирания метод на Островски. По аналогичен начин модифицираме в интервална форма и други класически итерационни методи и описваме теоремите, доказващи тяхната сходимост. Интервалния подход може да бъде приложен и върху други итерационни схеми, модификации на Нютоновия метод. Спрели сме се на седем итерационни метода, които модифицираме в интервална форма и, с които изследваме избрани функции, за да намерим броя итерации необходими за достигане на реален корен в предварително избран интервал. В интервална форма, първоначалното приближение $\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k})}$ е интервал, в който f има прост корен x^* и $\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k})})$ е дефинирана и не се нулира, т.е $0 \notin \boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k})})$.

Модифицираме в интервална форма методите на Frontini и Sormani, Weerakoon и Fernando, Homeier и методи предложени от Kou с ред на сходимост 3 и 5. За всяка от предложените модификации сме извели теорема, доказваща сходимостта на метода. Използваме Лема 3.2.5 и Теорема 3.2.7 на стр. 99 от ДТ, за да докажем теоремата за сходимостта на предложените от нас модификации. Интервалните модификации и експериментите, направени с тях са описани в нашите статии [49] и [50].

Интервална форма на метода на Frontini и Sormani – middle point.

В първа част на трета глава разглеждаме класическия итерационен метод на Frontini и Sormani [29] с ред на сходимост

3. Интервалната форма на метода има вида:

$$(3) \qquad \boldsymbol{x^{(k+1)}} = \boldsymbol{x^{(k)}} \cap \boldsymbol{S(x^{(k)}, y^{(k)})}, \ k = 0, 1, 2, ...,$$

където

$$\boldsymbol{N(x)} = mid(x) - \frac{f(mid(x))}{2.\boldsymbol{f'(x)}},$$

$$(4) \qquad \boldsymbol{y^{(k)} = x^{(k)}} \cap \boldsymbol{N(x^{(k)})},$$

$$(5) \qquad \boldsymbol{S(x, y)} = mid(x) - \lambda.f(mid(x)), \quad \boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{\boldsymbol{f'(y)}}.$$

Със следващата теорема доказваме сходимостта на метода в статия [49]:

Теорема 3.2.15 [49] Нека $f \in C(\boldsymbol{x^{(0)}})$ и $0 \notin \boldsymbol{f'(x^{(k)})}$, а f има прост корен $x^* \in \boldsymbol{x^{(0)}}$. Тогава, ако $\boldsymbol{S(x^{(k)}, y^{(k)})} \subseteq \boldsymbol{x^{(k)}}$, формула (3) има ред на сходимост 3, т.е. съществува константа K, такава, че

$$wid(\boldsymbol{x^{(k+1)}}) \leq K(wid(\boldsymbol{x^{(k)}}))^3.$$

Доказателството на теоремата може да се види в ДТ на стр. 105.

Останалите методи сме представили по аналогичен начин и пълното им описание, заедно с експериментите, може да се види в нашите статии [49] и [50]. Направени са експерименти със следните методи:

1. Метод на Newton.

2. Метод на Ostrowski.

3. Модифициран метод на Ostrowski.

4. Метод на Frontini и Sormani.

5. Метод на Weerakoon и Fernando.

6. Метод на Homeier.

7. Метод на Kou.

8. Методи на Kou с ред на сходимост 5.

С тези методи сме изследвали следните функции:

$f_1(x) = x(x^9 - 1) - 1.$

$f_2(x) = x^2 - \exp(x) - 3x + 2.$

$f_3(x) = \exp(-x) + \cos(x).$

$f_4(x) = \exp(x) - 4x^2.$

$f_5(x) = x^2 - \exp(x) - 3x + 2.$

$f_6(x) = x^2 - 3.$

$f_7(x) = (x+2).\exp(x) - 1.$

$f_8(x) = x^5 + x^4 + 4.x^2 - 15.$

$f_9(x) = \cos(x) - x.$

Всички изчисления са направени с компютърната програма MATLAB (R2016a) и INTLAB toolbox – приложение за интервален анализ, създадено от професор Rump [70]. Точността, с която търсим корена е $tol = 1e - 15$. Стоп критерият, който ще използваме е $rad(X) = \frac{1}{2}.(b - a) < tol$.

Избираме първоначален интервал $X = [a, b]$, за който са в сила следните условия:

1. В краищата на интервала функцията $f(x)$ има противоположни знаци – $f(a).f(b) < 0$.

2. Първата производна $f'(x)$ е непрекъсната в интервал $[a, b]$.

Експерименти с интервални методи - първа част

Първа част експерименти включва методите на Newton, Ostrowski, модифицирания метод на Ostrowski, метод на Frontini и Sormani, метод на Weerakoon и Fernando, метод на Homeier и метод на Kou с ред на сходимост 3. Избираме първоначален интервал $X = [a, b]$, за който са в сила следните условия: 1. $f(a).f(b) < 0$ и 2. $f'(x)$ е непрекъсната в интервал $[a, b]$. Правим експерименти с два първоначални интервала, по-тесен и по-широк и описваме броя итерации, достигнати със съответния метод. Описание на методите и резултатите от експериментите могат да се видят в ДТ, стр. 103–109.

Изводи

От направените изследвания, можем да заключим, че за малък първоначален интервал, интервалния модифициран метод на Ostrowski прави най-малък брой итерации, сравнен с другите методи, разгледани в статията. За по-широк интервал, методът на Frontini и Sormani е най-бързо сходящ, а с най-много на брой итерации е методът на Kou. За някои от функциите, интервалния модифициран метод на Ostrowski прави над 100 итерации и не достига корена.

Експерименти с интервални методи - втора част

В раздел 3.2.14 сме направили интервални модификации на методи на Kou с ред на сходимост 5. Изведени са теореми, доказващи сходимостта на методите. Направени са експерименти, с които новите интервални формули са сравнени с методите на Newton, Ostrowski (Ostr) и модифицирания метод на Ostrowski (MOstr). Описание на експериментите може да се види на стр. 116 в ДТ.

1. Метод на Newton.
2. Метод на Ostrowski(Ostr).
3. Модиф. метод на Ostrowski (MOstr).

4. Метод на Коu (Kou1).
5. Метод на Коu (Kou2).
6. Метод на Коu (Kou3).

Изследвани са следните функции:

1. $f_1(x)=x(x^9-1)-1$.
2. $f_2(x)=x^2-\exp(x)-3x+2$.
3. $f_3(x)=\exp(-x)+\cos(x)$.
4. $f_4(x)=\exp(x)-4x^2$.
5. $f_5(x)=(x+2).\exp(x)-1$.
6. $f_6(x)=\cos(x)-x$.
7. $f_7(x)=\frac{2}{x^5}+3.sin(x^4)+5$.
8. $f_8(x)=(x-2)^{23}-1$.

Описание на експериментите може да се види на стр. 116 в ДТ.

Изводи

1. Избраните три метода на Kou са също толкова бързи и ефективни.

2. Метода на Ostrowski, модифицирания метод на Ostrowski и метод Kou2 за някои функции са разходящи.

3. За някои функции, методи Kou1 и Kou2 правят дори по - малък брой итерации от интервалния модифициран метод на Ostrowski.

4. Можем да обобщим, че всички методи са по-бързи от метода на Нютон.

Методите са описани в статия [50].

Основни приноси в глава 3

1. Изследвани са класически итерационни методи за намиране на реален корен на нелинейно уравнение с първоначални приближения, които отговарят на условия Нютонов тип.

2. Направени са анализ и сравнение на резултатите, получени при прилагането на различни итерационни методи за намиране на реален корен на нелинейни функции.

3. Предложена е модификация на класически итерационни методи в интервална форма.

4. Формулирани са теореми за сходимост на предложени от нас интервални методи и доказателство на тези теореми.

5. Направени са експерименти с предложените от нас методи и са сравнени резултатите.

Публикациите по трета глава от дисертационния труд са [4], [5], [6], [7],[8].

Авторска справка

В дисертацията сме представили информационни технологии и математически програми за експерименти, свързани с изследване на нелинейни функции и математически модели на икономически процеси. Направили сме теоретичен анализ на реални икономически процеси и сме извели зависимости и условия. С помощта на компютърните програми MATLAB и INTLAB сме изследвали нелинейни функции за намиране прост корен и изчисляване на брой итерации и точност при изчисленията. Предложили сме интервални модификации на класически итерационни схеми и сме извели теореми, доказваща тяхната сходимост. Получени са следните резултати:

1. Илюстрирахме методика, базирана на информационните технологии, чрез която се представят, решават и анализират математически модели.
2. Построихме математически модел, който илюстрира и подпомага разбирането на Първата теорема на благосъстоянието.
3. Демонстрирахме информационна технология, чрез която се решава този модел.
4. Предложихме обобщен модел M2 на реален икономически процес и изведохме зависимости, необходими за анализ.
5. В предложеният от нас модел сме разгледали специален случай, при който съществува устойчиво равновесие, което е най-доброто решение и за двамата играчи. Изведохме необходимото за това условие и за модела, предложен от Breton и Zaccour.

6. Направихме експерименти с класически итерационни методи при наложени условия за първоначално приближение.
7. Предложихме интервални модификации на класически итерационни методи.
8. Формулирахме и доказахме теореми за сходимост за предложените модификации.
9. Направихме експерименти с предложените от нас модификации и резултатите сравнихме с резултатите, получени при прилагането на известни интервални формули.

Публикации по дисертационния труд

1. [6] Т. Матева, *Понятието двойнственост в нелинейното оптимиране. Приложение в икономиката*, сборник с доклади на научна конференция с международно участие МАТТЕХ, Шуменски университет „Епископ Константин Преславски", Шумен 2012, стр. 64–71.

2. [7] Т. Матева, *Първата теорема на икономиката за благосъстоянието - математически модел*, сборник с доклади от научна конференция Unitech – Габрово, 2014, стр. 387–392.

3. [40] I. G. Ivanov and T. P. Mateva, *Cournot and Stackelberg Equilibria in an Asymmetric Duopoly*, British Journal of Mathematics and Computer Science, 15 (2016), pp. 1–13, Available: http://www.sciencedomain.org/abstract/14146.

4. [46] T. P. Mateva, *A Comparison of iterative methods for solving nonlinear equations*, Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics (в процес на рецензия).

5. [47] T. P. Mateva , *A comparison of iterative methods with third order of convergence for solving nonlinear equations*, Thai Journal of Mathematics (в процес на рецензия).

6. [48] T. P. Mateva, *Comparison of iterative methods with order of convergence three and four*, J. Fundam. Appl. Sci, (2018), 10(6S), pp. 1409-1421, Available: https://www.ajol.info/index.php/jfas/article/view/171897.

7. [49] T. P. Mateva, *Newton type interval methods for solving nonlinear scalar equations*, Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl., (2018), Vol. 10, pp. 282-298.

8. [50] I. G. Ivanov and T. P. Mateva, *Interval methods with fifth order of convergence for solving nonlinear scalar equations*, Axioms,(2019),8 (15), pp. 1–11.

Апробация на резултатите

Резултатите, представени в дисертационния труд са докладвани на семинар на катедра „Информатика и математика", Колеж - Добрич, на семинари на катедра „Икономика и моделиране". Докладвани са на национални и международни конференции в България:

1. Научна конференция с международно участие MATTEX, Шуменски университет „Епископ Константин Преславски", Шумен 2012.
2. Научна конференция Unitech, Габрово, 2014.
3. MMSC – International Workshop on Mathematical Modelling and Scientific Computing, 18-24 September, Добрич, 2016.
4. Applied Modeling in Economics, Finance and Social Sciences (AMEFSS 2017), 27 - 31 August, Хисаря, 2017.
5. Applied Modeling in Economics, Finance and Social Sciences, 1.07–6.07.2018, Трявна.

Благодарност

Изразявам дълбоката си признателност и благодарност към моя научен ръководител проф. д. м. н. Иван Ганчев Иванов, който ме насочи в тази област на изчислителната математика. Благодаря на ръководството на Колеж-Добрич и своите колеги за подкрепата при реализиране на дисертационния труд.