РЕЗЮМЕТА НА ПУБЛИКАЦИИТЕ

на Вежди Исмаилов Хасанов

за участие в конкурса за заемане на академичната длъжност „професор”
в област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление 4.5. Математика (Изчислителна математика),
обявен в „Държавен вестник”, бр. 55/12.07.2019 г.

(публикациите не повтарят представените за придобиване на образователната и научна степен „доктор” и за заемане на академичната длъжност „доцент”)

Учебници и учебни пособия

- В. Хасанов, Лекции по числени методи, (електронен учебник) ЦДО Шуменски университет, 2014, стр.139, ISBN 978-954-577-860-5

  Представеният лекционен материал е групиран в осем глави, последният от които има помощен характер. Всяка глава е разделена на параграфи, които съответстват на темите в учебната програма по дисциплината „Числени методи“, която се чете в Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“. Основните включени въпроси са: интерполиране с интерполационен полином на Лагранж и Нютон с разделени разлики, приближаване на функции в нормирани пространства (равномерни и средноквадратични приближения и метод на най-малките квадрати), квадратурни формули на Нютон – Коутс, решаване на нелинейни уравнения, директни и итерационни методи за решаване на системи линейни уравнения и накрая методи за намиране на собствени стойности и вектори на матрици. Последната глава представлява допълнение, което съдържа необходимия минимум знания от математическия анализ и алгебрата. В края на всеки параграф са включени контролни въпроси и задачи за проверка на усвоения теоретичен материал.

  Цикълът лекции, макар че е насочен към студенти от Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“, той може да бъде полезен и на студенти от други висши училища, изучаващи тази дисциплина, както и на всеки, който се интересува от числените методи.

- В. Хасанов, Линейно оптимиране, УИ „Еп. Константин Преславски“, Шумен, 2019, стр. 192, ISBN 978-619-201-327-1

  Линейното оптимиране е основна дисциплина в учебните планове на голям брой специалности във висшето образование, а на други е част от по-широки математически курсове.

  Настоящият учебник е предназначен за студенти от специалностите на ШУ „Епископ Константин Преславски“, в учебния план на които е включена едноименната дисциплина, но с успех може да се ползва и от други студенти, докторанти и специалисти, които се интересуват от теорията на линейното оптимиране. Трябва да се има предвид, че теоретичното съдържание на книгата надхвърля това на лекционния курс за студентите в бакалавърската степен. Противно на очакваното, да се спестяват много от доказателствата на теоремите, тук авторът ги е включил в стремежа си да отговори и на най-любознателния и претенциозен читател.

Учебникът е разделен на параграфи, които са групирани в пет глави и едно приложение. Във всеки параграф теоретичното изложение е подплатено с множество примери и/или илюстрации, които следва да подпомогнат изучаването на изложения материал, а в края на параграфите са включени контролни въпроси и задачи за самостоятелна работа.

- В. Хасанов, Ръководство по числени методи с Matlab, (второ преработено и допълнено издание), УИ „Еп. Константин Преславски“, Шумен, 2019, стр. 248, ISBN 978-619-201-310-3

  Съдържанието на ръководството е съобразено с учебната програма по дисциплината „Числени методи“, която се чете в Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“. Ръководството е насочено към студенти от Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“, но може да бъде полезно и на студенти от други висши училища, изучаващи тази дисциплина, както и на всеки, който се интересува от числените методи.

  Ръководството е разделено на параграфи, които са групирани в шест глави и едно приложение „Въведение в MATLAB“. Всеки параграф започва с теоретични бележки, съдържа множество решени примерни задачи и задачи за самостоятелна работа. Направените теоретични бележки за някои теми са кратки, за други не толкова кратки, но едните и другите са добър материал за първоначално запознаване с предмета на числените методи и задачите, които изучава и са достатъчни за усвояване на решенията на примерните задачи и решаване на задачите за самостоятелна работа. Последният параграф към всяка глава съдържа съществуващите в системата MATLAB вградени функции за решаване на съответните задачи и други нови функции-програми, реализиращи изучените методи.

  Първото издание на ръководството е от 2006 г. Второто издание е преработено и допълнено с нови параграфи отнасящи се за: интерполационната задача на Ермит, интерполиране със сплайн-функции и метода на прогонката за решаване на тридиагонални системи линейни уравнения.

Статии

1. **V.I. Hasanov**, Notes on two perturbation estimates of the extreme solutions to the equations $X \pm A^* X^{-1} A = Q$, *Applied Mathematics and Computation*, 216, (2010), pp.1355-1362, `(Q1, IF=1.536)`

   В тази статия са разгледани две пертурбационни оценки на максималните положително определени решения съответно на матричните уравнения

$$X + A^* X^{-1} A = Q \tag{1.1}$$

и

$$X - A^* X^{-1} A = Q. \tag{1.2}$$

Разгледани са съответните пертурбирани уравнения:

$$\tilde{X} + \tilde{A}^* \tilde{X}^{-1} \tilde{A} = \tilde{Q} \tag{1.3}$$

и

$$\tilde{X} - \tilde{A}^*\tilde{X}^{-1}\tilde{A} = \tilde{Q}. \tag{1.4}$$

Основните резултати са:

Теорема 1.1. *Нека A, Q, $\tilde{A}$, $\tilde{Q} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $(Q > 0,\ \tilde{Q} > 0)$ са матрични коефициенти съответно на матричните уравнения (1.1) и (1.3), P положително определена матрица. Предполагаме, че уравнението (1.1) има положително определено решение и X_L е максималното решение. Нека $\alpha_+ = \|PX_L^{-1}AP^{-1}\|_2$, $\beta_+ = \|PX_L^{-1}P\|_2$,*

$$\begin{aligned} b_+ &= 1 - \alpha_+^2 + \beta_+ \left\|P^{-1}\Delta Q P^{-1}\right\| , \\ c_+ &= \left\|P^{-1}\Delta Q P^{-1}\right\| + 2\alpha_+ \left\|P^{-1}\Delta A P^{-1}\right\| + \beta_+ \left\|P^{-1}\Delta A P^{-1}\right\|^2 . \end{aligned}$$

Ако $\alpha_+ < 1$ и

$$2\left\|P^{-1}\Delta A P^{-1}\right\| + \left\|P^{-1}\Delta Q P^{-1}\right\| \leq \frac{(1-\alpha_+)^2}{\beta_+} ,$$

тогава $D_+ = b_+^2 - 4c_+\beta_+ \geq 0$, пертурбираното уравнение (1.3) има максимално положително определено решение $\tilde{X}_L$ и

$$\|\Delta X_L\| \ \leq\ \|P\|_2^2 \frac{b_+ - \sqrt{D_+}}{2\beta_+} .$$

Теорема 1.2. *Let A, Q, $\tilde{A}$, $\tilde{Q} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $(Q > 0,\ \tilde{Q} > 0)$ be coefficient matrices for matrix equations (1.2) and (1.4), P is a positive definite matrix. Let $\alpha = \|PX_+^{-1}AP^{-1}\|_2$, $\beta = \|PX_+^{-1}P\|_2$, where X_+ is the unique positive definite solution of equation (1.2),*

$$\begin{aligned} b &= 1 - \alpha^2 + \beta\|P^{-1}\Delta Q P^{-1}\| , \\ c &= \|P^{-1}\Delta Q P^{-1}\| + 2\alpha\|P^{-1}\Delta A P^{-1}\| + \beta\|P^{-1}\Delta A P^{-1}\|^2 . \end{aligned}$$

If $\alpha < 1$ and

$$2\left\|P^{-1}\Delta A P^{-1}\right\| + \left\|P^{-1}\Delta Q P^{-1}\right\| \leq \frac{(1-\alpha)^2}{\beta} ,$$

then $D = b^2 - 4c\beta \geq 0$ and

$$\|\Delta X_+\| \ \leq\ \|P\|_2^2\, \frac{b - \sqrt{D}}{2\beta} .$$

Тези две оценки са модификации на по-рано получените резултати в случай на $P = I$ в следната статия:

V.I. Hasanov, I.G. Ivanov, On two Perturbation Estimates of the Extreme Solutions to the Matrix Equations $X \pm A^*X^{-1}A = Q$, *Linear Algebra Appl.*, **413** (2006), pp. 81-92.

Условията $\|X_L^{-1}A\|_2 < 1$ и $\|X_+^{-1}A\|_2 < 1$, които са наложени в горната статия невинаги са изпълнени. В настоящата статия (вижте теореми 1.1 и 8.1) горните условия са заместени съответно с $\|PX_L^{-1}AP^{-1}\|_2 < 1$ и $\|PX_+^{-1}AP^{-1}\|_2 < 1$, където

P е положително определена матрица, която следва да се избере така, че условията да са изпълнени.

В случай на $\|Q^{-\frac{1}{2}}AQ^{-\frac{1}{2}}\|_2 < \frac{1}{2}$ е показано, че $\|Q^{\frac{1}{2}}X_L^{-1}AQ^{-\frac{1}{2}}\|_2 < 1$ за уравнение (1.1) и $\|Q^{\frac{1}{2}}X_+^{-1}AQ^{-\frac{1}{2}}\|_2 < 1$ за уравнение (1.2). В този случай може да се избере $P = Q^{\frac{1}{2}}$. За съжаление в настоящата статия въпросът за избора на P, в общия случай, остава отворен.

2. G.H. Nedzhibov, **V.I. Hasanov**, Newton-Secant Method for Solving Operator Equations, *Mathematica Balkanica*, **26**, (2012), pp.369-376, `MathSciNet [MR3184868]`

В тази статия са разгледани два итерационни метода за решаване на нелинейното уравнение

$$F(x) = 0, \tag{2.1}$$

където F е оператор, дефиниран и диференцируем по Фреше върху отвореното подмножество D на банаховото пространство X със стойности в банаховото пространство Y. Първият метод представлява обобщение на познатия метод *Нютон – секущи* за нелинейни скаларни уравнения, а вторият е модификация на първия.

Разгледани са методите:

Нютон – секущи

$$\begin{array}{l} y_k = x_k - F'(x_k)^{-1}F(x_k)\,, \\ x_{k+1} = x_k - [x_k, y_k]^{-1}F(x_k)\,, \quad \text{за} \;\; k \geq 0\,, \quad \text{и} \;\; x_0 \in D \end{array} \tag{2.2}$$

и *модификация на метода Нютон – секущи*

$$\begin{array}{l} y_k = x_k - F'(x_0)^{-1}F(x_k)\,, \\ x_{k+1} = x_k - [x_k, y_k]^{-1}F(x_k)\,, \quad \text{за} \;\; k \geq 0\,, \quad \text{и} \;\; x_0 \in D \end{array} \tag{2.3}$$

където $F'(x)$ е производна на Фреше на F в точката x, а $[x, y]$ е разделена разлика на F в точките x и y. За $[x, y]$ имаме $[x, y](x - y) = F(x) - F(y)$.

При предположението, че $\alpha \in D$ е еднократна нула на оператора F, в който съществува $F'(\alpha)^{-1}$ и ненамаляващите функции

$$a, b, c : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

удовлетворяват условията:

$$\begin{array}{l} \|F'(\alpha)^{-1}(F'(x) - F'(\alpha))\| \leq a(\|x - \alpha\|)\,,\; for \;\; all \;\; x \in D \\ \|F'(\alpha)^{-1}([x, y] - [x, \alpha])\| \;\leq b(\|y - \alpha\|)\,,\; for \;\; all \;\; x, y \in D \\ \|F'(\alpha)^{-1}([x, \alpha] - [\alpha, \alpha])\| \leq c(\|x - \alpha\|)\,, \;\; for \;\; all \;\; x \in D\,, \end{array} \tag{2.4}$$

е доказана следващата теорема за локална сходимост на метод (2.2):

Теорема 2.1. *Нека F е нелинеен оператор, дефиниран и диференцируем по Фреше върху отвореното подмножество D на банаховото пространство X със стойности от банаховото пространство Y. Нека $\alpha \in D$ е еднократна нула на F, $F'(\alpha)^{-1}$ съществува и удовлетворява условията (2.4). Освен това нека уравненията*

$$a(r) + b(r) = 1 \quad \text{и} \quad 2b(r) + c(r) = 1 \tag{2.5}$$

имат минимални положителни нули r_1 *и* r_2 *съответно. Нека* $r = min\{r_1, r_2\}$ *и*

$$\bar{U}(\alpha, r^*) = \{x \in X : \|x - \alpha\| \le r^*\} \subset D \quad за \quad r^* \in (0, r)\,.$$

Тогава, при условието $x_0 \in \bar{U}(\alpha, r^*)$*, членовете на редицата* $\{x_k\}$ *дефинирани с (2.2) са добре определени, съдържат се в* $\bar{U}(\alpha, r^*)$ *за всяко* $k \ge 0$ *и са сходящи към* α*. Освен това имаме следната оценка на грешката:*

$$\|x_{k+1} - \alpha\| \le \frac{b(\|y_k - \alpha\|)\|x_k - \alpha\|}{1 - b(\|y_k - \alpha\|) - c(\|x_k - \alpha\|)} \tag{2.6}$$

за $k \ge 0$*, където* $y_k = x_k - F'(x_k)^{-1}F(x_k)$*.*

При допълнителното условие към горната теорема: функцията $b(x)/x$ да е ограничена върху множеството D и квадратичната сходимост на метода на Нютон следва кубична сходимост на редицата $\{x_k\}$ дефинирана в (2.2).

Аналогична теорема на горната е доказана и за сходимостта на метод (2.3) и съответно квадратична скорост на сходимост при ограниченост на $b(x)/x$.

3. A.A. Ali, **V.I. Hasanov**, On some sufficient conditions for the existence of a positive definite solution of the matrix equation $X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I$, *AIP Conference Proceedings*, Volume 1690, 060001, (2015), Proc. of the 41st International Conference on Applications of Mathematics in Engineering and Economics, AMEE 2015, Sozopol, Bulgaria, 8-13 June 2015, `(SJR=0.18)`

В тази публикация е изследвано матричното уравнение

$$X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I, \tag{3.1}$$

където A и B са $n \times n$ матрици, I е $n \times n$ единична матрица. Предложени са отслабени достатъчни условия за съществуване на положително определено решение на уравнение (3.1) в сравнение с тези на Дуан и др. в Linear and Multilinear Algebra, 62(6):839-852, 2014. и на Берзиг и др. в Mathematical Sciences, 2012, 6:27, 2012.

Условията $A^*A < \frac{1}{8}I$ и $B^*B < \frac{1}{8}I$ на Дуан и др. са заместени с $A^*A < \frac{2}{9}I$ и $B^*B < \frac{2}{2}I$.

Берзиг и др. доказват съществуване на положително определено решение на уравнение (3.1) при наличие на два параметъра $\beta > \alpha > 0$, удовлетворяващи условията:

$$\begin{aligned}
&(i) \quad \tfrac{1}{\alpha}A^*A + \alpha I \le I \le \beta I;\\
&(ii) \quad \beta A^*A - \alpha B^*B \le \alpha\beta(1-\alpha)I;\\
&(iii) \quad \beta B^*B - \alpha A^*A \le \alpha\beta(\beta-1)I;\\
&(iv) \quad A^*A < \tfrac{\alpha^2}{2}I, B^*B < \tfrac{\alpha^2}{2}I.
\end{aligned}$$

В тази работа условията са отслабени и са заместени с

$$\begin{aligned}
&(a) \quad \beta A^*A - \alpha B^*B \le \alpha\beta(1-\alpha)I;\\
&(b) \quad \beta B^*B - \alpha A^*A \le \alpha\beta(\beta-1)I;\\
&(c) \quad \|A\|^2 + \|B\|^2 < \alpha^2.
\end{aligned}$$

4. **V.I. Hasanov**, Perturbation Theory for Linearly Perturbed Algebraic Riccati Equations, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **35** (12), (2014), pp.1532-1559, `(Q3, IF=0.591)`

В тази статия са предложени пертурбационни оценки на устойчивите относно Π решения на уравненията

$$A^*X + XA - XGX + Q + \Pi(X) = 0 \tag{4.1}$$

и

$$X - A^*X(I+GX)^{-1}XA - Q - \Pi(X) = 0\,. \tag{4.2}$$

които са линейно пертурбирани уравнения на съответните класически рикатиеви уравнения:

$$A^*X + XA - XGX + Q = 0 \tag{4.3}$$

и

$$X - A^*X(I+GX)^{-1}XA - Q = 0 \tag{4.4}$$

с линейния положителен оператор Π.

Разгледани са пертурбираните уравнения

$$\tilde{A}^*\tilde{X} + \tilde{X}\tilde{A} - \tilde{X}\tilde{G}\tilde{X} + \tilde{Q} + \tilde{\Pi}(\tilde{X}) = 0 \tag{4.5}$$

и

$$\tilde{X} - \tilde{A}^*\tilde{X}(I+\tilde{G}\tilde{X})^{-1}\tilde{X}\tilde{A} - \tilde{Q} - \tilde{\Pi}(\tilde{X}) = 0\,, \tag{4.6}$$

където $\tilde{A} = A + \Delta A$, $\tilde{G} = G + \Delta G$, и $\tilde{Q} = Q + \Delta Q$ са пертурбираните коефициенти на уравненията (4.1) и (4.2) с ΔA, ΔQ, ΔG и $\tilde{\Pi} = \Pi + \Delta\Pi$. Тук $\Delta\Pi$ е линеен оператор такъв, че $\tilde{\Pi}$ е положителен оператор.

Следвайки техниката на Сън в SIAM J. Matrix Anal. Appl., 19 (1998), pp. 39–65 за уравненията на Рикати (4.3) и (4.4) са получени пертурбационни оценки за изследваните уравнения.

Нека

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_c W &= \Phi^* W + W\Phi\,,\\
\mathbf{P}\,N &= \mathbf{L}_c^{-1}\,(XN + N^*X)\,,\\
\mathbf{Q}\,M &= \mathbf{L}_c^{-1}\,(XMX)
\end{aligned}$$

и $\Delta\Pi(X) = \Delta_1\Pi(X) + \Delta_2\Pi(X)$, където $\Delta_1\Pi$ и $\Delta_2\Pi$ са пертурбации съответно от първи и втори ред на Π.

Нека $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ и d_π са оценки на следните норми:

$$\|\mathbf{L}_c^{-1}\Delta_1\Pi(X)\| \le \varepsilon_1, \quad \|\mathbf{L}_c^{-1}\Delta_2\Pi(X)\| \le \varepsilon_2 \quad \text{и} \quad \|\Delta\Pi\| \le d_\pi,$$

и

$$\begin{cases}
l = \|\mathbf{L}_c^{-1}\|^{-1}, \quad p = \|\mathbf{P}\|, \quad q = \|\mathbf{Q}\|, \quad \ell_\pi = \|\mathbf{L}_c^{-1}\Pi\|,\\
\epsilon = \dfrac{1}{l}\|\Delta Q\| + p\|\Delta A\| + q\|\Delta G\|, \quad \varepsilon = \epsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2,\\
\delta = \|\Delta A\|_2 + \|\Delta G\|_2\|X\|_2, \quad \theta = \delta + \dfrac{d_\pi}{2}, \quad \hat{g} = \|G\|_2 + \|\Delta G\|_2\,.
\end{cases} \tag{4.7}$$

Един от основните резултати в разглежданата статия е:

Теорема 4.1. *Нека X е с-устойчива относно Π решение на уравнение (4.1) и дефинираните величини в (4.7) удовлетворяват условието:*

$$\theta + \sqrt{l\hat{g}\varepsilon} < (1 - \ell_\pi)\frac{l}{2}\,.$$

Освен това нека $\tilde{A} = A + \Delta A$, $\tilde{Q} = Q + \Delta Q$, $\tilde{G} = G + \Delta G \geq 0$ и $\Delta\Pi$ е линеен оператор такъв, че $\tilde{\Pi} = \Pi + \Delta\Pi$ е положителен оператор. Тогава пертурбираното уравнение (4.5) с матрични коефициенти $\tilde{A}$, $\tilde{G}$ and $\tilde{Q}$ и линеен оператор $\tilde{\Pi}$ има с-устойчива относно $\tilde{\Pi}$ решение $\tilde{X}$, и

$$\|X - \tilde{X}\| \leq \frac{2l\varepsilon}{(1-\ell_\pi)l - 2\theta + \sqrt{[(1-\ell_\pi)l - 2\theta]^2 - 4l\hat{g}\varepsilon}} =: \nu_*\,.$$

Аналогична теорема е получена и за уравнение (4.2).

5. **V. Hasanov**, S. Hakkaev, Newton's method for a nonlinear matrix equation, *Comptes rendus de l Academie bulgare des Sciences*, **68** (8), (2015), pp. 973-982, `(Q4, IF=0.284)`

В тази статия е предложен метод на Нютон за пресмятане на максималното положително определено решение X_L на уравнението

$$X + \sum_{i=1}^{m} A_i^* X^{-1} A_i = Q. \tag{5.1}$$

Уравнение (5.1) за първи път се среща в работата на Лонг и др. Bull. Braz. Math. Soc., 39, (2008) 371–386 в случай на $m = 2$ и по-късно в общия случай в Appl. Math. Comput., 216, (2010) 3480–3485, където са разгледани метода на последователните приближения (fixed point iteration) и негови модификации.

Нека $\mathcal{F}(X) = Q - X - \sum_{i=1}^{m} A_i^* X^{-1} A_i$ и $\mathcal{F}'_X(H) = -H + \sum_{i=1}^{m} A_i^* X^{-1} H X^{-1} A_i$ където $\mathcal{F}'_X$ е производната на Фреше на $\mathcal{F}$ в X.

Методът на Нютон: $X_{k+1} = X_k - (\mathcal{F}'_{X_k})^{-1}\mathcal{F}(X_k)$ за уравнението $F(X) = 0$ може да се запише

$$X_k - \mathcal{L}_k(X_k) = Q - 2\sum_{i=1}^{m} L_{ik}^* A_i, \quad k = 1, 2\ldots, \tag{5.2}$$

където $\mathcal{L}_k(X_k) = \sum_{i=1}^{m} L_{ik}^* X_k L_{ik}$ и $L_{ik} = X_{k-1}^{-1} A_i$.

В следващата теорема е доказана глобална сходимост на метода на Нютон и едно свойство на максималното решение X_L $\left(\rho(\sum_{i=1}^{m} (X_L^{-1}A_i)^T \otimes (X_L^{-1}A_i)^*) \leq 1\right)$. Тук $A \otimes B = (a_{ij}B)$ е произведение на Кронекер.

Теорема 5.1. *Нека $\hat{X} > 0$ е решение на неравенството $\mathcal{F}(X) \geq 0$ и X_0 е такава матрица, че $\rho\left(\sum_{i=1}^{m} (X_0^{-1}A_i)^T \otimes (X_0^{-1}A_i)^*\right)$. Тогава редицата $\{X_k\}$ в (5.2) е добре дефинирана и удовлетворява следните условия:*

(a) $X_k \geq X_{k+1}, \quad X_k \geq \hat{X}, \quad \mathcal{F}(X_k) \leq 0, \quad k \geq 1;$

(б) $\rho\Big(\sum_{i=1}^{m}(X_k^{-1}A_i)^T \otimes (X_k^{-1}A_i)^*\Big) < 1, \quad k \geq 0$*;*

(в) $\lim_{k\to\infty} X_k = X_L$ *е максималното решение на (5.1);*

(г) $\rho\Big(\sum_{i=1}^{m}(X_L^{-1}A_i)^T \otimes (X_L^{-1}A_i)^*\Big) \leq 1.$

Освен това е доказано, че ако (5.1) има положително определено решение, то $\rho\Big(\sum_{i=1}^{m}(Q^{-1}A_i)^T \otimes (Q^{-1}A_i)^*\Big) < 1$. Това дава възможност да се избере за начално приближение $X_0 = Q$.

6. **V.I. Hasanov**, S.A. Hakkaev, Convergence analysis of some iterative methods for a nonlinear matrix equation, *Computers & Mathematics with Applications*, **72** (4), (2016), pp.1164-1176, `(Q1, IF=1.531)`

   В тази статия е изследвана скоростта на сходимост на следните итерационни методи за намиране на максималното решение на матричното уравнение (5.1):

   – *Метод на последователните приближения (BFPI)*

$$\begin{cases} X_0 = Q, \\ X_{k+1} = Q - \sum_{i=1}^{m} A_i^* X_k^{-1} A_i, \quad k = 0, 1, \dots; \end{cases} \tag{6.1}$$

   – *Първа модификация на BFPI без обръщане на матрици (FIFV-BFPI)*

$$\begin{cases} X_0 = Q, \quad 0 < Y_0 \leq Q^{-1}, \\ X_{k+1} = Q - \sum_{i=1}^{m} A_i^* Y_k A_i, \\ Y_{k+1} = Y_k(2I - X_k Y_k), \qquad k = 0, 1, \dots; \end{cases} \tag{6.2}$$

   – *Втора модификация на BFPI без обръщане на матрици (SIFV-BFPI)*

$$\begin{cases} 0 < Y_0 \leq Q^{-1}, \quad X_0 = Q - \sum_{i=1}^{m} A_i^* Y_0 A_i, \\ Y_{k+1} = Y_k(2I - X_k Y_k), \\ X_{k+1} = Q - \sum_{i=1}^{m} A_i^* Y_{k+1} A_i, \qquad k = 0, 1, \dots. \end{cases} \tag{6.3}$$

   Следват основните резултати за разгледаните методи.

Теорема 6.1. *Ако уравнение (5.1) има положително определено решение, то за метода на последователните приближения (BFPI) (6.1) имаме*

$$\|X_{k+1} - X_L\| \leq \sum_{i=1}^{m} \|X_L^{-1}A_i\|^2 \, \|X_k - X_L\|,$$

за всяко $k \geq 0$*.*

Освен това за BFPI (6.1) е получено

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|X_k - X_L\|} \leq \rho\Big(\sum_{i=1}^{m}(X_L^{-1}A_i)^T \otimes (X_L^{-1}A_i)^*\Big) \leq 1.$$

Следователно редицата $\{X_k\}$ дефинирана в (6.1) има R-линейна сходимост при $\rho(\sum_{i=1}^{m}(X_L^{-1}A_i)^T \otimes (X_L^{-1}A_i)^*) < 1$, и подлинейна, когато $\rho(\sum_{i=1}^{m}(X_L^{-1}A_i)^T \otimes (X_L^{-1}A_i)^*) = 1$.

Теорема 6.2. *Ако уравнение (1.1) има положително определено решение, тогава за FIFV-BFPI (6.2) и $\epsilon > 0$ имаме*

$$\|Y_{k+1} - X_L^{-1}\| \leq \sum_{i=1}^{m} \|A_i X_L^{-1} + \epsilon\|^2 \|Y_{k-1} - X_L^{-1}\|$$

и

$$\|X_{k+1} - X_L\| \leq \sum_{i=1}^{m} \|A_i\|^2 \|Y_k - X_L^{-1}\|$$

за достатъчно големи числа k. Освен това, ако $A_1, A_2, \ldots, A_m$ са неособени матрици, то

$$\|X_{k+1} - X_L\| \leq \sum_{i=1}^{m} \|X_L^{-1} A_i + \epsilon\|^2 \|X_{k-1} - X_L\|$$

за достатъчно големи числа k.

Теорема 6.3. *Ако уравнение (1.1) има положително определено решение, тогава за SIFV-BFPI (6.3) и $\epsilon > 0$ имаме*

$$\|Y_{k+1} - X_L^{-1}\| \leq \sum_{i=1}^{m} \|A_i X_L^{-1} + \epsilon\|^2 \|Y_k - X_L^{-1}\|$$

и

$$\|X_k - X_L\| \leq \sum_{i=1}^{m} \|A_i\|^2 \|Y_k - X_L^{-1}\|$$

за достатъчно големи числа k. Освен това, ако $A_1, A_2, \ldots, A_m$ са неособени матрици, то

$$\|X_{k+1} - X_L\| \leq \sum_{i=1}^{m} \|X_L^{-1} A_i + \epsilon\|^2 \|X_k - X_L\|$$

за достатъчно големи числа k.

За *SIFV-BFPI* (6.3) е получено също

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|X_k - X_L\|} \leq \rho\left(\sum_{i=1}^{m} (X_L^{-1} A_i)^T \otimes (X_L^{-1} A_i)^*\right), \tag{6.4}$$

т.е. втората модификация (6.3) има скорост на сходимост, тъй както основният метод на последователните приближения (6.1).

Освен изследваната сходимост на горните методи в тази статия е предложена и една модификация на метода на Нютон, наречена метод на Стейн:

Нека $X_0 = Q$ (X_0 може да бъде избран по различен начин, виж Теорема 6.4). За $k = 1, 2, \ldots,$ $L_{ik} = X_{k-1}^{-1} A_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ и се решава линейното матрично уравнение

$$X_k - L_{jk}^* X_k L_{jk} = Q - \sum_{i=1}^{m} A_i^* L_{ik} - A_j^* L_{jk}, \tag{6.5}$$

където j е фиксиран индекс от $\{1, 2, \ldots, m\}$, докато $\|X_k - X_{k-1}\|_\infty \leq tol$. Тогава $X_L \approx X_k$.

Теорема 6.4. *Нека $\hat{X} > 0$ е решение на $\mathcal{F}(X) \geq 0$, X_0 е ермитова матрица, за която $\mathcal{F}(X_0) \leq 0$ and $\rho(\sum_{i=1}^m (X_0^{-1}A_i)^T \otimes (X_0^{-1}A_i)^*) < 1$. Тогава уравнение (6.5) дефинира редица $\{X_k\}$ със следните свойства:*

(а) $X_k \geq X_{k+1}, \quad X_k \geq \hat{X}, \quad \mathcal{F}(X_k) \leq 0, \quad k \geq 0$;

(б) $\rho(\sum_{i=1}^m (X_k^{-1}A_i)^T \otimes (X_k^{-1}A_i)^*) < 1, \quad k \geq 0$;

(в) $\lim_{k\to\infty} X_k = X_L$ *е максималното решение на (5.1);*

(г) $\rho(\sum_{i=1}^m (X_L^{-1}A_i)^T \otimes (X_L^{-1}A_i)^*) \leq 1$.

При наличие на положително определено решение на уравнение (5.1) е доказано, че $\mathcal{F}(Q) \leq 0$. Освен това е доказана R-линейна сходимост на метода на Стейн (6.5).

7. **V.I. Hasanov**, A.A. Ali, On convergence of three iterative methods for solving of the matrix equation $X + A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B = Q$, *Computational and Applied Mathematics*, **36** (1), (2017), pp.79-87, `(Q3, IF=0.863)`

   Изследванията в тази статия предхождат тези в предната независимо, че е отпечатана по-късно. Тук гореописаните резултати, за първите три метода за уравнение (5.1): метода на последователните приближения (6.1) и двете модификации FIFV-BFPI (6.2) и SIFV-BFPI (6.3), са получени в случай на $m = 2$.

8. **V.I. Hasanov**, On perturbation estimates for the extreme solution of a matrix equation, *Annals of the Academy of Romanian Scientists: Series on Mathematics and its Applications*, **9** (1), (2017), pp.74-88, `(SJR=0.189)`

   В тази статия са получени няколко пертурбационни оценки за единственото положително определено решение на уравнението

$$X - \sum_{i=1}^m A_i^* X^{-1} A_i = Q\,.$$

Горното уравнение може да се запише:

$$X - A^* \widehat{X}^{-1} A = Q\,, \tag{8.1}$$

където $\widehat{X} = I_m \otimes X$ и

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}.$$

Доказано е в литературата, че уравнение (8.1) има единствено положително определено решение, което е наречено екстремно.

Разгледано е пертурбираното уравнение

$$\tilde{X} - \tilde{A}^* \widehat{\tilde{X}}^{-1} \tilde{A} = \tilde{Q}\,, \tag{8.2}$$

където $\tilde{A}$ и $\tilde{Q}$ ($\tilde{Q} > 0$) са съответно с малки пертурбации на A и Q в (8.1). Нека

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 \\ \vdots \\ \tilde{A}_m \end{pmatrix},$$

където $\tilde{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ са с малки пертурбации на A_i. Нека $\tilde{X}_+$ е екстремното решение на уравнение (8.2), $\Delta X_+ = \tilde{X}_+ - X_+$, $\Delta Q = \tilde{Q} - Q$ и $\Delta A = \tilde{A} - A$.

Йин и Фанг в J. Appl. Math. Comput., 43, (2013) 199-211 обобщават нашата оценка от Linear Algebra Appl., 413, (2006) 81-92, която е за уравнение (8.1) в случай на $m = 1$, като условието $\|X_+^{-1}A\|_2 < 1$ заместват с $\|A\|_2\|X_+^{-1}\|_2 < 1$, което очевидно е по-силно ограничение.

Тук, освен да се отслаби горното условие, е приложена техниката описана в първата статия от настоящия списък и така е получен следния резултат:

Теорема 8.1. *Нека A, Q и $\tilde{A}$, $\tilde{Q}$ с $Q > 0$, $\tilde{Q} > 0$ са матрични коефициенти съответно на матричните уравнения (8.1) и (8.2), и P е положително определена матрица. Използваме означенията $\alpha = \|\widehat{PX_+^{-1}}AP^{-1}\|_2$, $\beta = \|PX_+^{-1}P\|_2$, където X_+ е екстремното решение на уравнение (8.1),*

$$\begin{aligned} b &= 1 - \alpha^2 + \beta\|P^{-1}\Delta QP^{-1}\|_2\,, \\ c &= \|P^{-1}\Delta QP^{-1}\|_2 + 2\alpha\|\widehat{P^{-1}}\Delta AP^{-1}\|_2 + \beta\|\widehat{P^{-1}}\Delta AP^{-1}\|_2^2\,. \end{aligned}$$

Ако $\alpha < 1$ и

$$2\|\widehat{P^{-1}}\Delta AP^{-1}\|_2 + \|P^{-1}\Delta QP^{-1}\|_2 \leq \frac{(1-\alpha)^2}{\beta}\,,$$

то $D = b^2 - 4c\beta \geq 0$ и

$$\|\Delta X_+\|_2 \;\leq\; \|P\|_2^2\frac{b - \sqrt{D}}{2\beta} \;\equiv\; S_{err}^P\,.$$

Въпросът за избора на матрицата P така, че да имаме $\|\widehat{PX_+^{-1}}AP^{-1}\|_2 < 1$, за който стана дума в първата статия, тук също възниква и остава отворен. В статията, за разгледаните числени примери, е предложено $P = Q^{1/2} + 2Q^{1/4}$, но това далеч не решава проблема в общия случай.

9. **V.I. Hasanov**, D.I. Borisova, Perturbation estimates for the maximal solution of a nonlinear matrix equation, *Annals of the Academy of Romanian Scientists: Series on Mathematics and its Applications*, **9** (1), (2017), pp.28-43, `(SJR=0.189)`

В тази работа са получени няколко пертурбационни оценки за максималното положително определено решение на уравнение (5.1):

$$X + \sum_{i=1}^{m} A_i^* X^{-1} A_i = Q.$$

Разгледано е пертурбираното уравнение

$$\tilde{X} + \sum_{i=1}^{m} \tilde{A}_i^{\,*} \tilde{X}^{-1} \tilde{A}_i = \tilde{Q}, \tag{9.1}$$

където матричните коефициенти $\tilde{A}_i := A_i + \Delta A_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ и $\tilde{Q} := Q + \Delta Q$ са с малки пертурбации.

Дуан и др. в Appl. Math. Comput. 218 (2011) 4458-4466 са изследвали уравнение (5.1) в случай на $Q = I$ и получават пертурбационна оценка при пертурбации на матричните коефициенти A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Първият резултат тук е обобщение на оценката на Дуан и др. до приложимост към уравнение (5.1) за произволно Q включително и неговото пертурбиране:

Теорема 9.1. *Нека*

(i) $\|Q^{-1}\|^2 \sum_{i=1}^{m} \|A_i\|^2 < \frac{1}{4}$;

(ii) $\|\Delta Q\| \leq \left[\frac{1}{2} - \|Q^{-1}\| \Big(\sum_{i=1}^{m} \|A_i\|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right] \|Q^{-1}\|^{-1}$,

(iii) $\sum_{i=1}^{m} \|\Delta A_i\|^2 + 2 \sum_{i=1}^{m} \|A_i\| \|\Delta A_i\| < \left[\frac{1}{4} - \|\tilde{Q}^{-1}\|^2 \sum_{i=1}^{m} \|A_i\|^2 \right] \|\tilde{Q}^{-1}\|^{-2}$.

Тогава уравненията (5.1) и (9.1) имат съответни максимални решения X_L и $\tilde{X}_L$. Освен това

$$\|\Delta X_L\| \leq \frac{1}{c_1} \left[\|\Delta Q\| + 2\|\tilde{Q}^{-1}\| \sum_{i=1}^{m} \|\Delta A_i\| (2\|A_i\| + \|\Delta A_i\|) \right] =: E_1,$$

където

$$c_1 = 1 - 4\|Q^{-1}\| \|\tilde{Q}^{-1}\| \sum_{i=1}^{m} \|A_i\|^2.$$

Вторият основен резултат е обобщение на оценката на Ксю в Linear Algebra Appl. 336, (2001) 61-70 за уравнение (5.1) при $m = 1$, при който оценката независи от коефициентите на пертурбираното уравнение (9.1):

Теорема 9.2. *Нека*

(i) $\eta := \frac{1}{2} - \|Q^{-1}\| \Big(\sum_{i=1}^{m} \|A_i\|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} > 0$,

(ii) $\|\Delta Q\| \leq \eta \|Q^{-1}\|^{-1}$,

(iii) $\sum_{i=1}^{m} \|\Delta A_i\|^2 + 2 \sum_{i=1}^{m} \|A_i\| \|\Delta A_i\| < \frac{\eta(2 - 3\eta)}{4\|Q^{-1}\|^2}$.

Тогава уравненията (5.1) и (9.1) имат максимални положително определени решения съответно X_L и $\tilde{X}_L$. Освен това

$$\|\Delta X_L\| \le \frac{1}{c_3}\left[(1-\eta)\|\Delta Q\| + 2\|Q^{-1}\| \sum_{i=1}^{m} \big(2\|A_i\| + \|\Delta A_i\|\big)\|\Delta A_i\|\right] =: E_3,$$

където $c_3 = \eta(3-4\eta)$.

10. **V.I. Hasanov**, On a perturbation estimate for the extreme solution of the matrix equation $X - A^*\widehat{X}^{-1}A = Q$, *Innovativity in Modeling and Analytics Journal of Research*, **2**, (2017), pp.1-11.

    В тази работа е разгледана пертурбационната оценка, получена в статия №8 в настоящия списък, за екстремното решение на уравнението $X - A^*\widehat{X}^{-1}A = Q$. В статия №8 има поставен въпрос „Как да се избере матрицата P така, че да е вярно $\|\widehat{PX_+^{-1}AP^{-1}}\|_2 < 1$“. Същият въпрос е поставен и в статия №1 в случай на $m = 1$. В тази работа е доказано $\left\|\widehat{X_+^{-1/2}AX_+^{-1/2}}\right\|_2 < 1$, където X_+ е екстремното решение на разглежданото уравнение.

    Следователно един възможен отговор на горният въпрос е $P = X_+^{-1/2}$.

11. **V.I. Hasanov**, On the matrix equation $X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I$, *Linear and Multilinear Algebra*, **66** (9), (2018), pp.1783-1798, `(Q2, IF=0.964)`

    В тази статия е изследвано матричното уравнение (3.1):

$$X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I.$$

Получени са някои достатъчни и необходими условия за съществуване на положително определени решения, както и условие за съществуване на минимално положително определено решение. Заедно с условия за съществуване на положително определено решение са определени и множества, в които се намира търсеното решение.

Теорема 11.1. *Нека M е максималното положително определено решение на уравнението $X + A^*X^{-1}A = I$. Тогава уравнение (3.1) има решение $X_M \in [M, N]$, където N е максимално положително определено решение на уравнението $X + A^*X^{-1}A = I + B^*M^{-1}B$. Освен това,*

(i) ако $M < X_M$, то $\rho(X_M^{-1}A) \le 1$,

(ii) ако $M < X_M$, и A или B е неособена матрица, то $\rho(X_M^{-1}A) < 1$,

(iii) ако B е неособена матрица, то $M < X_M$.

В следващата теорема са дадени необходими условия, положително определеното решение на (3.1) да е по-малко или по-голямо от I:

Теорема 11.2. *Нека $\hat{X}$ е ермитово решение на уравнение (3.1). Тогава:*

(i) *ако $\hat{X} \geq I$, то уравнение $X + A^*X^{-1}A = I + B^*B$ има максимално положително определено решение X_L и $\hat{X} \leq X_L$. Освен това, ако матрицата B е неособена, то $\rho(AB^{-1}) \leq 1$;*

(ii) *ако $\hat{X} > I$, то B е неособена и $\rho(AB^{-1}) < 1$;*

(iii) *ако $0 < \hat{X} \leq I$ и матрицата A е неособена, то $\rho(BA^{-1}) \leq 1$;*

(iv) *ако $0 < \hat{X} < I$, то A е неособена и $\rho(BA^{-1}) < 1$.*

За итерационния метод

$$X_{k+1} = A(I - X_k + B^*X_k^{-1}B)^{-1}A^*, \quad X_0 = \gamma I. \tag{11.1}$$

е формулирана следната теорема:

Теорема 11.3. *Нека A е неособена матрица, $0 < A^*A - B^*B \leq \frac{1}{4}I$, $\alpha_1 = \frac{1-\sqrt{1-4\lambda_n(A^*A-B^*B)}}{2}$, $\beta_1 = \frac{1-\sqrt{1-4\lambda_1(A^*A-B^*B)}}{2}$ и $\beta_2 = \frac{1+\sqrt{1-4\lambda_1(A^*A-B^*B)}}{2}$. Тогава редицата $\{X_k\}$, дефинирана в (11.1) с*

(i) *$\gamma = \gamma_1 \in (0, \alpha_1]$ е монотонно растяща и сходяща към положително определено решение $X_{\gamma_1} \in [\gamma_1 I,\ \beta_1 I]$ на уравнение (3.1),*

(ii) *$\gamma = \gamma_2 \in [\beta_1, \beta_2]$ е монотонно намаляваща и сходяща към положително определено решение $X_{\gamma_2} \in [\alpha_1 I,\ \gamma_2 I]$ на (1.1),*

(iii) *$\gamma \in [\alpha_1, \beta_1]$ и ако $\beta_1\|A\|\sqrt{\alpha_1^2 + \|B\|^2} < \alpha_1(\lambda_1(A^*A - B^*B) + \sigma_n^2(B))$, тогава уравнение (1.1) има единствено решение $\hat{X} \in [\alpha_1, \beta_1]$.*

Разгледан е втори итерационен метод, с който се генерира матричната редица $\{Y_k\}$ чрез уравнението

$$Y_k - A^{-*}B^*Y_kBA^{-1} = A^{-*}(I - Y_{k-1}^{-1})A^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{11.2}$$

където Y_0 е решение на

$$Y - A^{-*}B^*YBA^{-1} = A^{-*}A^{-1}. \tag{11.3}$$

Теорема 11.4. *Уравнение (3.1) има положително определено решение $\hat{X} < I$ тогава и само тогава, когато A е неособена матрица, $\rho(A^{-1}B) < 1$, и съществува ермитова матрица $\bar{Y} > I$ такава, че $Y_k > \bar{Y}$ за всеки елемент на редицата $\{Y_k\}_{k=0}^{\infty}$ генерирана с (11.2)–(11.3).*

От горната теорема следва, че ако уравнение (3.1) има положително определено решение $\hat{X} < I$, тогава то има минимално положително определено решение $X_S = Y_L^{-1} > Y_0^{-1}$, където $Y_L = \lim_{k\to\infty} Y_k$.

12. D.I. Borisova, **V.I. Hasanov**, On some perturbation bounds for a matrix equation from interpolation problems, *Annals of the Academy of Romanian Scientists: Series on Mathematics and its Applications*, **10** (2), (2018), pp.297-313, `(SJR=0.354)`

В тази работа са сравнени, с редица числени примери, съществуващите пертурбационни оценки за единственото положително определено решение на уравнението (8.1):

$$X - A^* \widehat{X}^{-1} A = Q \, .$$

Разгледани са оценките на:

– Сън: Perturbation analysis of the matrix equation $X = Q + A^H(\hat{X} - C)^{-1}A$, Linear Algebra Appl., 362:211-228, 2003;

– Йин и Фанг: Perturbation analysis for the positive definite solution of the nonlinear matrix equation $X - \sum_{i=1}^{m} A_i^* X^{-1} A_i = Q$, J. Appl. Math. Comput., 43:199-211, 2013;

– Константинов и др.: Sensitivity of the matrix equation $A_0 + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i A_i^* X^{p_i} A_i = 0$, $\sigma_i = \pm 1$, Appl. Comput. Math., 10:409-427, 2011.

– Хасанов: On perturbation estimates for the extreme solution of a matrix equation Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl., 9:74-88, 2017 (статия № 8) и On a perturbation estimate for the extreme solution of the matrix equation $X - A^* \widehat{X} - 1A = Q$, Innovativity in Modeling and Analytics Journal of Research, 2:1-11, 2017 (статия № 10);

Резултатите от експериментите показват, че оценките на Константинов и др., Sun и нашите в много от случаите са с конкурентни показатели. Освен това предложените от нас оценки имат прости изчислителни формули.

Шумен,
2019 г.

Съставил:
(В. Хасанов)