ШУМЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„ЕПИСКОП КОНСТАНТИН ПРЕСЛАВСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА „ИКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ“

АЙНУР АБДУЛОВА АЛИ

ИТЕРАЦИОННИ МЕТОДИ ЗА РЕШАВАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ МАТРИЧНИ УРАВНЕНИЯ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация
за присъждане на образователната и научна степен
„доктор“
в докторска програма „Изчислителна математика“;
професионално направление 4.5. Математика;
област на висше образование
4. Природни науки, математика и информатика

Научен ръководител
проф. д-р Вежди Исмаилов Хасанов

Шумен, 2020 г.

Дисертационния труд е обсъден и допуснат до защита на разширен съвет на катедра "Икономика и математическо моделиране" при Шуменски университет "Епископ Константин Преславски състоял се на 20.10.2020 г.

Дисертацията има обем от 76 страници. Цитираната литература обхваща 65 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 04.12.2020г. от ... часа в заседателната зала Шуменския университет.

Автор: Айнур Абдулова Али

Заглавие: Итерационни методи за решаване на рационални матрични уравнения

Съдържание

Актуалност и мотивировка на темата

Матричните уравнения имат широко приложение в теорията и практиката. По-голям практически интерес представляват положително определените решения. Редица задачи от теорията и практиката, водят до решаване на матрични уравнения. Значително място в научната литература, с приложенията си в теорията на оптималното управление (optimal control theory), филтрацията на Келман (Kalman filtering) и др., заемат добре известните и изучени рикатиеви уравнения [24, 29, 4, 25, 26, 27]. От появата си през 60-те години до сега рикатиевите уравнения продължават да привличат интереса на изследователите.

Уравнение $X + A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B = Q$ за първи път е изследвано в [28], която работа излиза през 2008 година. Това уравнение е частен случай на широко известните матрични уравнения на Рикати, по специално на дискретното алгебрично уравнение.

Често в диференциалните и диференчните уравнения от теорията на управлението, водещи до решаване на класическите уравнения на Рикати се появяват случайни смущения. Изследванията на такива задачи също водят до решаване на матрични уравнения, известни в различните източници като стохастични, пертурбирани или рационални рикатиеви уравнения [36, 33, 13, 31, 32, 15, 14, 23]. В най-общ вид Freiling и Hochhaus в своите изследвания в [15] и [14] разглеждат рационалните рикатиеви уравнения. Тези уравнения се свеждат до уравнеието $X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I$ [6, 7], като първата ни позната работа излиза през 2012 година.

През 2008 година излиза работата на Duan и др. [9] за уравнението $X - \sum_{i=1}^{m} A_i^* X^{\delta_i} A_i = Q$, а през 2017 година Gao [16] в своят публикация изследва уравнението $X - A^*X^pA - B^*X^{-1}B = I (0 < p, q < 1)$. През 2019 година излиза работата на Хасанов [22] за уравнението $X - A^*XA - B^*X^{-1}B = I$.

Цел на дисертацията

Целта на дисертацията е да се изследват класове от рационални матрични уравнения за съществуване на положително определени решения. Поставените цели в дисертацията в основни линии се свеждат до следното:

- да се получат необходими и достатъчни условия за съществуване на положително определени решения;
- да се изследват свойствата на положително определените решения;
- да се построят итерационни алгоритми за пресмятане на положително определени решения и специални такива;
- да се изследва скоростта на сходимост на предложените алгоритми и да се сравнят със съществуващи.

Апробация на резултатите

Резултатите от дисертационния труд са докладвани и обсъдени на следните научни форуми:

- Семинар на ФМИ на Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“ 2014 г. [19];
- 41st International Conference „Applications of Mathematics in Engineering and Economics“ (AMEE 2015): 8-13 юни 2015, Созопол [18];
- Семинар на ФМИ на Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“ 2015 г. [18];
- Научна конференция с международно участие MATTEX 2016., 2016 г. Шумен [1];

- Научна конференция с международно участие MATTEX 2018, 2018 г. Шумен [2];
- The International Conference „Applied Modeling in Economics, Finance and Social Sciences“ (AMEFSS 2020), от 28 юни до 2 юли, 2020 г. Созопол [3].

Структура и обем на дисертацията

Дисертационният труд съдържа 75 страници, включващи: съдържание; кратко резюме; апробация на резултатите; авторска справка; благодарности; основна част, която се състои от въведение и три глави, разделени на параграфи и точки в 60 страници и литература от 65 заглавия в 7 страници. Параграфите и формулите имат двойна номерация в рамките на съответната глава. Първото число показва номера на главата, а второто – поредния номер на формулата или параграфа в главата. Твърденията и алгоритмите имат тройна номерация. Първото число показва номера на глава, второто – номера на параграфа, а третото число показва поредния номер. Номерацията на таблиците е двойна, например: таблица 3.1 е първа таблица в трета глава.

Съдържание на дисертацията

Дисертацията се състои от въведение и три глави.

В настоящия дисертационен труд са изследвани нелинейните матрични уравнения:

$$X + A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B = Q, \tag{1}$$

$$X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I \tag{2}$$

и

$$X - A^*XA - B^*X^{-1}B = I. \tag{3}$$

Преди да продължим искам да направим едно преобразование. Чрез умножаване на (1) от двете страни с $Q^{-\frac{1}{2}}$ получаваме

$$Q^{-\frac{1}{2}}XQ^{-\frac{1}{2}} + Q^{-\frac{1}{2}}A^*X^{-1}AQ^{-\frac{1}{2}} + Q^{-\frac{1}{2}}B^*X^{-1}BQ^{-\frac{1}{2}} = I.$$

Полагаме $Y = Q^{-\frac{1}{2}}XQ^{-\frac{1}{2}}$, $C = Q^{-\frac{1}{2}}AQ^{-\frac{1}{2}}$ и $D = Q^{-\frac{1}{2}}BQ^{-\frac{1}{2}}$. Така получаваме уравнението:

$$Y + C^*Y^{-1}C + D^*Y^{-1}D = I, \tag{4}$$

където I е единичната матрица. Следователно уравнението (1) има решение тогава и само тогава, когато уравнението (4) има решение, т.е. разглеждането на дясна част $Q = I$ не променя общността.

Целта на изследванията е да се получат необходими и достатъчни условия за съществуване на положително определени решения и да се предложат итерационни методи за такива решения на разглежданите уравнения.

Нека направим някои означения: A^* означаваме спрегнатата матрици на A; $A > 0 (A \geq 0)$ - положително определена (полуопределена) матрица A; $A > B (A \geq B)$ значи $A - B > 0 (A - B \geq 0)$; множества $[A, B] = \{C | A \leq C \leq$

$B\}$, $(A,B] = \{C | A < C \leq B\}$, $[A,B) = \{C | A \leq C < B\}$ и $(A,B) = \{C | A < C < B\}$; $\lambda(A)$ - множеството на всички собствени стойности; $\rho(A)$ - спектрален радиус на матрицата A; $\|.\|$-спектрална норма.

Уравненията (1), (2) и (3) в случай на $B = 0$ или $A = 0$ се свеждат съответно до добре изучените уравнения

$$X + A^* X^{-1} A = Q \tag{5}$$

и

$$X - B^* X^{-1} B = Q, \tag{6}$$

а от друга страна представляват част от по-общи фамилии от уравнения изследвани в литературата.

Наред с интензивното изследване на рикатиевите уравнения през последните 30 години се изучават и уравненията (5) и (6) [5, 10, 37, 38, 12, 17, 20, 21, 34, 30]. За последните уравнения са получени необходими и достатъчни условия за съществуване на положително определени решения, за единственост или съществуване на минимално и/или максимално положително определени решения. Предложени са различни итерационни алгоритми с линейна или квадратична скорост на сходимост за пресмятане на положително определени решения.

Глава 1. Положително определени решения на матричното уравнение $X + A^* X^{-1} A + B^* X^{-1} B = Q$

В тази глава изследваме матричното уравнение (1). Съдържа три параграфа.

В параграф 1.1 представяме някои предварителни резултати за уравнение (1): метод на последователните приближения и една негова модификация без обръщане на матрици получени от Long и др. [28]; втора модификация на метода на последователните приближения без обръщане на матрици, предложен от Vaezzadeh и др. в [35]; резултати за скоростта на сходимост на модификациите на метода последователните приближениями [35]. Получените резултати са в резултат на аналогични изследвания на тези, които са за уравнение (5) [17].

Long и др. [28] изследват уравнение (1) при дясна част $Q = I$. Те получават:

Теорема 1. *[28, Theorem 2.2] Ако уравнението (4) има положително определено решение Y, то*
(1) $C^*C + D^*D < I$,
(2) $Y > CC^*$ *and* $Y > DD^*$.

В своята работа Long и др. [28] предлагат метод на последователните приближения за уравнение (1) при дясна част $Q = I$ по аналогия на [11].

Алгоритъм 1. *[28] Нека $X_0 = \delta I, \delta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. За $n = 0, 1, \ldots,$ пресмятаме*

$$X_{n+1} = I - A^* X_n^{-1} A - B^* X_n^{-1} B. \tag{7}$$

В [28, Theorem 3.1] Long и др. доказват, че ако уравнението (1) в случай на $Q = I$ има положително определено решение и при δ, такова че $\delta(1-\delta) \leq \lambda_{min}(A^*A) + \lambda_{min}(B^*B)$ и $\delta^2 > \lambda_{max}(A^*A) + \lambda_{max}(B^*B)$, то тогава алгоритъм 1 дефинира монотонно намаляваща матрична редица, която е сходяща към положително определеното решение на уравнение (1) при $Q = I$.

Аналогично на Zhan [37], Long и др. [28] предлагат една модификация на метода на последователните приближения без обръщане на матрица за пресмятане на максималното положително определено решение на уравнение (1) при $Q = I$.

Алгоритъм 2. *[28] Нека $X_0 = Y_0 = I$. За $n = 0, 1, 2, \ldots$ пресмятаме*

$$\begin{cases} X_{n+1} = I - A^* Y_n A - B^* Y_n B \\ Y_{n+1} = Y_n (2I - X_n Y_n) \end{cases} \tag{8}$$

Long и др. [28] доказват сходимост на алгоритъм 2. Освен това Long и др. [28] доказват, че ако уравнението (1) при $Q = I$ има положително определено решение, то алгоритъм 2 генерира намаляваща матрична редица $X_0 \geq X_1 \geq \cdots$ и растяща матрична редица $Y_0 \leq Y_1 \leq \cdots$ и $\lim_{n\to\infty} X_n = X_L$, $\lim_{n\to\infty} Y_n = X_L^{-1}$, където X_L е максималното положително определено решение. В общия случай при положително определена матрица Q свойствата на сходимост на алгоритъм 2 се запазват.

По късно Vaezzadeh и др. [35] изучават уравнение (1) в случай на $Q = I$ и изследват скоростта на сходимост на алгоритъм 2. Те обобщават резултата на Guo и Lancaster [17] за уравнение (1) при $Q = I$ и получават:

Теорема 2. *[35, Theorem 2] Ако матричното уравнение (1) при $Q = I$ има положително определено решение, то за алгоритъм 2 и за кое да е $\epsilon > 0$ е изпълнено*

$$\|Y_{n+1} - X_L^{-1}\| \leq (\|AX_L^{-1}\| + \|BX_L^{-1}\| + \epsilon)^2 \|Y_{n-1} - X_L^{-1}\| \tag{9}$$

и

$$\|X_{n+1} - X_L\| \leq (\|A\|^2 + \|B\|^2)\|Y_n - X_L^{-1}\| \tag{10}$$

за всяко достатъчно голямо n.

За уравнение (1) при $Q = I$ Vaezzadeh и др. в [35] предлагат още една модификация на метода на последователните приближения без обръщане на матрица, аналогичен на алгоритъм на Guo и Lancaster [17].

Алгоритъм 3. *[35] Нека $X_0 = I$, $Y_0 = I$. За $n = 0, 1, \ldots$, пресмятаме*

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n(2I - X_nY_n) \\ X_{n+1} = I - A^*Y_{n+1}A - B^*Y_{n+1}B \end{cases} \tag{11}$$

Vaezzadeh и др. [35] за алгоритъм 3 доказват следните теореми:

Теорема 3. *[35, Theorem 3] Нека уравнение (1) има положително определено решение. Тогава итерационната формула (11) дефинира монотонно намаляваща матрична редица $\{X_n\}$, сходяща към максималното положително определено решение X_L. Също така матричната редица $\{Y_n\}$, дефинирана от (11) е монотонно растяща и клони към X_L^{-1}.*

Теорема 4. *[35, Theorem 4] Ако матричното уравнение (1) със дясна част $Q = I$ има положително определено решение, за алгоритъм 3 и кое да е $\epsilon > 0$ имаме*

$$\|Y_{n+1} - X_L^{-1}\| \leq (\|AX_L^{-1}\| + \|BX_L^{-1}\| + \epsilon)^2 \|Y_n - X_L^{-1}\| \tag{12}$$

и

$$\|X_{n+1} - X_L\| \leq (\|A\|^2 + \|B\|^2) \|Y_n - X_L^{-1}\| \tag{13}$$

за всяко достатъчно голямо n.

При проучване на литературата и съществуващите резултати констатираме, че в изследванията на Long и др. [28] и Vaezzadeh и др. в [35] липсва резултат за скоростта на сходимост на метода на последователните приближения. Освен това при по-внимателно проучване забелязваме, че направените обобщения на резултатите на Guo и Lancaster [17] не са прецизни.

В параграф 1.2 е направен анализ на сходимостта на итерационните методи за пресмятане на положително определено решение на уравнение (1).

Теорема 1 на Long и др. [28] може да се запише и за уравнение (1):

Теорема 5. *(Следствие 1.2.1.) Ако уравнението (1) има положително определено решение X, то*

(1) $A^*Q^{-1}A + B^*Q^{-1}B < Q$,

(2) $X > AQ^{-1}A^*$ *и* $X > BQ^{-1}B^*$.

В точка 1.2.1 е анализирана скоростта на сходимост на метода на последователните приближения. Разглеждаме следния алгоритъм за уравнение (1).

Алгоритъм 4. *(Алгоритъм 1.2.2.) Нека* $X_0 = Q$*. За* $n = 0, 1, \ldots,$ *пресмятаме*

$$X_{n+1} = Q - A^* X_n^{-1} A - B^* X_n^{-1} B. \tag{14}$$

Показахме, че алгоритъм 4 генерира монотонно намаляваща и ограничена отдолу матрична редица.

Long и др. [28] за уравнение (1) в случай на $Q = I$ предлагат итерационен алгоритъм с метода на последователните приближения. Те доказват сходимост на итерационния алгоритъм, но не дават оценка на нейната скорост на сходимост. Използвайки идеята на Gao и Lancaster [17, Theorem2.3] ние получаваме аналогичен резултат за скоростта на сходимост на алгоритъм 4. Този резултат ни дава следната теорема, доказана в нашата публикация [19]

Теорема 6. *(Теорема 1.2.3.) Ако уравнение (1) има положително определено решение, тогава за алгоритъм 4 е изпълнено*

$$\|X_{n+1} - X_L\| \leq \left(\|X_L^{-1} A\|^2 + \|X_L^{-1} B\|^2\right) \|X_n - X_L\|,$$

за всяко $n \geq 0$*, където* X_L *е максималното положително определено решение на уравнение (1).*

Доказателството на теоремата може да се види на стр.26 от дисертационния труд.

В точка 1.2.2 е анализиран скоростта на сходимост на две модификации на метода на последователните приближения.

За уравнение (1) разглеждаме следния алгоритъм.

Алгоритъм 5. *(Алгоритъм 1.2.4.) Нека* $X_0 = Q, Y_0 = Q^{-1}$*. За* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *пресмятаме*

$$\begin{cases} X_{n+1} = Q - A^* Y_n A - B^* Y_n B \\ Y_{n+1} = Y_n (2I - X_n Y_n) \end{cases} \tag{15}$$

Алгоритъм 5 генерира две матрични редици като едната е монотонно намаляваща и ограничена отдолу, а другата е монотонно растяща и ограничена отгоре. Освен това кой да е елемент на едната редица е по-малък от кой да елемент на втората.

Използвайки идеята на Guo и Lancaster [17, Theorem3.3], която те прилагат при доказването на теоремата ние успяхме да подобрим резултатът на Vaezzadeh и др [35, Theorem 2] като дадем по добра оценка за скоростта на сходимост на алгоритъм 5. Освен това получаваме оценка, която не зависи от Y_n.

Теорема 7. *(Теорема 1.2.6.) За произволно $\epsilon > 0$ и за всяко достатъчно голямо n е изпълнено, че*

$$\|Y_{n+1} - X_L^{-1}\| \leq (\|AX_L^{-1}\|^2 + \|BX_L^{-1}\|^2 + \epsilon)\|Y_{n-1} - X_L^{-1}\| \tag{16}$$

и

$$\|X_{n+1} - X_L\| \leq (\|A\|^2 + \|B\|^2)\|Y_n - X_L^{-1}\|. \tag{17}$$

Освен това, ако A и B са неособени матрици, то

$$\|X_{n+1} - X_L\| \leq (\|X_L^{-1}A\|^2 + \|X_L^{-1}B\|^2 + \epsilon)\|X_{n-1} - X_L\| \tag{18}$$

за всяко достатъчно голямо n.

Доказателството на теоремата може да се види на стр.30 от дисертационния труд.

Разглеждаме още една модификация на метода на последователните приближения.

Алгоритъм 6. *(Алгоритъм 1.2.7.) Нека $X_0 = Q$, $Y_0 = Q^{-1}$. За $n = 0, 1, \ldots$, пресмятаме*

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n(2I - X_nY_n) \\ X_{n+1} = Q - A^*Y_{n+1}A - B^*Y_{n+1}B \end{cases} \tag{19}$$

Отново с помощта на метода на математическата индукция доказваме, че итерационния алгоритъм 6 генерира две матрични редици, такива че едната е монотонно намаляваща и ограничена отдолу, а другата е монотонно растяща и ограничена отгоре.

За алгоритъм 6 даваме по добра оценка за скоростта на сходимост от тази на Vaezzadeh и др [35, Theorem 3]. Този резултат ни дава следната теорема, доказана в нашата публикация [19].

Теорема 8. *(Теорема 1.2.8.) Ако матричното уравнение (1) има положително определено решение, тогава за алгоритъм 6 и произволно $\epsilon > 0$, имаме*

$$\|Y_{n+1} - X_L^{-1}\| \leq (\|AX_L^{-1}\|^2 + \|BX_L^{-1}\|^2 + \epsilon)\|Y_n - X_L^{-1}\| \tag{20}$$

и

$$\|X_{n+1} - X_L\| \leq (\|A\|^2 + \|B\|^2)\|Y_n - X_L^{-1}\| \tag{21}$$

за всяко достатъчно голямо число n. Освен това, ако A и B са неособени, то

$$\|X_{n+1} - X_L\| \leq (\|X_L^{-1}A\|^2 + \|X_L^{-1}B\|^2 + \epsilon)\|X_n - X_L\| \tag{22}$$

за всяко достатъчно голямо число n.

Забележка 1. (Забележка 1.2.9.) Ако в Теорема 6 $\|X_L^{-1}A\|^2 + \|X_L^{-1}B\|^2 < 1$, то матричната редица, генерирана от алгоритъм 4 е сходяща към максималното положително определено решение X_L със скорост на сходимост тъй както на геометрично прогресия с частно $r \leq \|X_L^{-1}A\|^2 + \|X_L^{-1}B\|^2$. Освен това, ако X е положително определеното решение на уравнение (1), за който $\|X^{-1}A\|^2 + \|X^{-1}B\|^2 < 1$, тогава $X \equiv X_L$

Забележка 2. (Забележка 1.2.10.) Според Теорема 2 линейната скорост на сходимост на алгоритъм 5 е гарантирана от условието $(\|AX_L^{-1}\|+\|BX_L^{-1}\|)^2 < 1$. Но според нашия резултат (Теорема 7) е необходимо да е изпълнено $\|AX_L^{-1}\|^2+\|BX_L^{-1}\|^2 < 1$. Очевидно е, че

$$\|AX_L^{-1}\|^2 + \|BX_L^{-1}\|^2 < (\|AX_L^{-1}\| + \|BX_L^{-1}\|)^2.$$

Следователно съществуват матрици A, B и максимално решение X_L на уравнението (1), при които $\|AX_L^{-1}\|^2+\|BX_L^{-1}\|^2 < 1$ и $(\|AX_L^{-1}\| + \|BX_L^{-1}\|)^2 > 1$. Това е показано в разгледаните примери в параграф числени експерименти на тази глава.

Забележка 3. (Забележка 1.2.11.) Според Теорема 4 линейната сходимост на алгоритъм 6 е гарантирана от условието $(\|AX_L^{-1}\|+\|BX_L^{-1}\|)^2 < 1$. Но условието $\|AX_L^{-1}\|^2+\|BX_L^{-1}\|^2 < 1$ е много добро, тъй като

$$\|AX_L^{-1}\|^2 + \|BX_L^{-1}\|^2 < (\|AX_L^{-1}\| + \|BX_L^{-1}\|)^2.$$

Освен това може да съществуват матрици A, B и максимално решение X_L на уравнението (1), при които $\|AX_L^{-1}\|^2 + \|BX_L^{-1}\|^2 < 1$ и $(\|AX_L^{-1}\| + \|BX_L^{-1}\|)^2 > 1$. Това е показано в разгледаните примери в параграф числени експерименти на тази глава.

В параграф 1.3 са представени числени експерименти на три примера, които илюстрират теоретичните резултати: показана е скоростта на сходимост на трите метода за намиране на положително апределено решение на матричното уравнение (1). Примерите в десиертационния труд са разположени от стр. 35 до стр. 40.

Изводи:

Доказана е линейна скоростта на сходимост на разгледания от Long и др. [28] итерационен алгоритъм за уравнението (1).

Разгледан е итерационен алгоритъм с метода на последователните приближения в случай на без обръщане на матрица. В своята работа Long и др.[28] изследват уравнението (1) при $Q = I$. Те предлагат варианта без обръщане на матрица за метода на последователните приближения за пресмятане на максималното положително определено решение на уравнение (1), при $Q = I$. По късно Vaezzadeh и др. [35] изучават уравнение

(1) при $Q = I$ и изследват скоростта на сходимост на предложения от Long и др.[28] итерационен алгоритъм. За уравнение (6) Gao и Lancaster [17] дават оценка на скоростта на сходимост, която не зависи от матричната редица $\{Y_n\}$. Използвайки тяхната идея ние успяхме да подобрим оценката за скоростта на сходимост на разгледания итерационен процес за уравнението (1), като оценката зависи само от матричната редица $\{X_n\}$.

Основни приноси в първа глава:

- Доказана е скоростта на сходимост за уравнението $X + A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B = Q$ за предложения от Long и др. [28] алгоритъм с метода на последователните приближения;

- Подобрени са теоремите за скоростта на сходимост (док. от Long и др.[28] и Vaezzadeh и др. [35]) за два итерационни алгоритъма с метода на последователите приближения без обръщане на матрица. Получени са максимално положително определено решение на матричното уравнение $X + A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B = Q$.

Публикацията по първа глава от дисертационния труд е:

[19] V. Hasanov and A. Ali, On convergence of three iterative methods for solving of the matrix equation $X+A^*X^{-1}A+B^*X^{-1}B = Q$, Computational and Applied Mathematics, 36, (2017), pp. 79-87.

Глава 2.Положително определени решения на матричното уравнение $X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I$

В тази глава изследваме матричното уравнение (2). Главата е разделена на три параграфа.

В параграф 2.1 са представени предварителните резултати, получени за уравнение (2): достатъчни условия съществуване на положително определено решение на разглежданото уравнение; двустранен итерационен метод за пресмятане на положително определеоно решение [7]; достатъчни условия, зависещи от два параметъра, за сходимост на итерационен метод за пресмятане на положително определено решение на (2) с дясна част $Q > 0$ [6].

В своята публикация Duan и др. [7] разглеждат уравнение (2). Предлагат итерационен алгоритъм за пресмятане на положително определено решение на уравнение (2).

Алгоритъм 7. *[7] Нека* $X_0 = \frac{1}{2}I, Y_0 = \frac{5}{4}I$. *За* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *пресмятаме*

$$\begin{cases} X_{n+1} = I - A^*X_n^{-1}A + B^*Y_n^{-1}B \\ Y_{n+1} = I - A^*Y_n^{-1}A + B^*X_n^{-1}B \end{cases} \tag{23}$$

Duan и др. [7] за алгоритъм 7 доказват, че при определени условия за матриците A и B, уравнение (2) има единствено положително определено решение.

Теорема 9. *[7, Теорема 2.3.] Ако* $A^*A < \frac{1}{8}I$ *и* $B^*B < \frac{1}{8}I$, *то уравнението (2) има единствено положително определено решение* $\widehat{X} \in [\frac{1}{2}I, +\infty)$. *Матричните редици* $\{X_n\}$ *и* $\{Y_n\}$, *генерирани от (23) са сходящи към* $\widehat{X}$ *и грешката е*

$$\max\{\|X_n - \widehat{X}\|_{tr}, \|Y_n - \widehat{X}\|_{tr}\} \leq \frac{\delta^n}{1-\delta} \max\{\|X_1 - X_0\|_{tr}, \|Y_1 - Y_0\|_{tr}\},$$

където

$$\delta = 8 \max\{\|AA^*\|, \|BB^*\|\}.$$

В теоремата означението $\|\cdot\|_{tr}$, се разбира $\|A\|_{tr} = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(A)$, където $\sigma_j(A)$ са сингулярни стойности на матрицата A.

По-късно Berzig и др. [6] в своята работа подробно изследват матричното уравнение (2) в случай на $Q > 0$. За това уравнение дават условия, зависещи от два параметъра, при които уравнението (2) в случай на $Q > 0$ има положително определено решение. Те предполагат, че за матриците A и B съществуват числа $\beta > \alpha > 0$, които удовлетворяват следните условия:

$$\text{(24)} \qquad \begin{array}{ll} 1. & \frac{1}{\alpha}A^*A + \alpha I \leq Q \leq \beta I, \\ 2. & \beta A^*A - \alpha B^*B \leq \alpha\beta(Q - \alpha I), \\ 3. & \beta B^*B - \alpha A^*A \leq \alpha\beta(\beta I - Q), \\ 4. & A^*A < \frac{\alpha^2}{2}I, B^*B < \frac{\alpha^2}{2}I \end{array}$$

Berzig и др. [6] предлагат итерационен алгоритъм аналогичен на алгоритъм 7.

Алгоритъм 8. *[6] Нека $X_0 = \alpha I, Y_0 = \beta I$. За $n = 0, 1, 2, \ldots$ пресмятаме*

$$\text{(25)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} X_{n+1} = Q - A^*X_n^{-1}A + B^*Y_n^{-1}B \\ Y_{n+1} = Q - A^*Y_n^{-1}A + B^*X_n^{-1}B \end{array} \right.$$

Berzig и др. [6] за алгоритъм 8 доказват, че итерационната формула 25 генерира матрични редици $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$, които са сходящи към единственото положително определено решение на уравнение (2) в случай на $Q > 0$.

Теорема 10. *[6, Теорема 3.1.] Ако числата $\beta > \alpha > 0$ удовлетворяват условията (24) то:*

(*i*) *уравнението (2) в случай на $Q > 0$ има единствено положително определено решение $X_L \in [\alpha I, \infty)$;*

(*ii*) $X_L \in [Q + \frac{1}{\beta}B^*B - \frac{1}{\alpha}A^*A,\ Q + \frac{1}{\alpha}B^*B - \frac{1}{\beta}A^*A]$;

(*iii*) *редиците $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$, генерирани от (25) са сходящи към X_L и грешката е*

$$\max\{\|X_n - X_L\|_{tr}, \|Y_n - X_L\|_{tr}\} \leq \frac{\delta^n}{1-\delta}\max\{\|X_1 - X_0\|_{tr}, \|Y_1 - Y_0\|_{tr}\},$$

където

$$0 < \delta < 1.$$

Теорема 11. *[6, Theorem 3.2.] Разглеждаме уравнение (2). Нека числата $\beta > \alpha > 0$ удовлетворяват условията:*

1. $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$
2. $\beta \geq 1 + \frac{\alpha}{2}$
3. $A^*A < \frac{\alpha^2}{2}I$, $B^*B < \frac{\alpha^2}{2}I$.

Тогава са изпълнени условията от (i) до (iii) на Теорема 10.

Тук е момента да направим следния извод:

Извод 1. Теорема 9 и Теорема 11 не са съществено различни, тъй като, ако $A^*A < \frac{1}{8}I$ и $B^*B < \frac{1}{8}I$, то съществува число α, удовлетворяващо условия 1. и 3. на Теорема 11, и обратно, ако съществува α, удовлетворяващо условие 1. и 3. на Теорема 11, то $A^*A < \frac{1}{8}I$ и $B^*B < \frac{1}{8}I$. Освен това в системата от условия (24), от първото неравенство на 1. следва 2. за произволно число $\beta > 0$.

Преди да преминем към следващия параграф ще направим анализ на условията (24).

Неравенството $\frac{1}{\alpha}A^*A + \alpha I \leq Q \leq \beta I$ в (24) при $Q = I$ добива вида $A^*A \leq \alpha(1-\alpha)I$. Освен това в (24) имаме $A^*A < \frac{\alpha^2}{2}I$. Понеже $\max_\alpha \min\{\alpha(1-\alpha), \frac{\alpha^2}{2}\} = \frac{2}{9}$, то последните две условия за матрицата A едновременно са изпълнени, ако $A^*A < \frac{2}{9}I$, т.е. $\|A\| < \frac{\sqrt{2}}{3}$. Следователно Теорема 9 и Теорема 11 могат да бъдат подобрени като предложим по-слаби ограничения на матричните коефициенти A и B.

В параграф 2.2 са получени нови подобрени резултатите на съществуващите в [7] и [6]. Новите условия са по-слаби ограничения върху матричните коефициенти A и B, при които е доказана сходимост на разгледания двустранен итерационен метод в [7] и [6].

Теорема 12. *(Теорема 2.2.1.) Нека*

$$\xi = \sqrt{2}\max\{\|A\|, \|B\|\}, \quad \eta = \frac{1+\sqrt{1-4\|A\|^2}}{2}, \quad \theta = 1+\frac{\xi}{2}.$$

Ако $\xi < \frac{2}{3}$, тогава:

(i) уравнение (2) има единствено положително определено решение X_L в матричното множество $(\xi I, \infty)$;

(ii) $X_L \in [I + \frac{1}{\theta}B^*B - \frac{1}{\eta}A^*A, I + \frac{1}{\eta}B^*B - \frac{1}{\theta}A^*A] \subset [\eta I, \theta I]$;

(iii) матричните редици $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$, дефинирани от (23) с начални приближения $X_0 = \mu I$ и $Y_0 = \upsilon I$, където $\mu \in (\xi, \eta]$ и $\upsilon \geq \theta$, са сходящи към X_L. Освен това

$$\max\{\|X_n - \widehat{X}\|, \|Y_n - \widehat{X}\|\} \leq q^n \|Y_0 - X_0\|,$$

където $q = (\frac{\xi}{\mu})^2 < 1$.

Доказателството на теоремата може да се види на стр.46 от дисертационния труд.

Теорема 13. *(Теорема 2.2.2.) Ако съществуват числа $\beta > \alpha > 0$, удовлетворяващи условията:*

1. $\beta A^*A - \alpha B^*B \leq \alpha\beta(1-\alpha)I$,
2. $\beta B^*B - \alpha A^*A \leq \alpha\beta(\beta-1)I$,
3. $\|A\|^2 + \|B\|^2 < \alpha^2$,

тогава уравнението (2) има единствено положително определено решение X_L в $[\alpha I, \beta I]$. Матричните редици $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ дефинирани от (23) с начални приближения $X_0 = \alpha I$, $Y_0 = \beta I$ са сходящи към X_L и грешката се дава от

$$\max\{\|X_n - X_L\|, \|Y_n - X_L\|\} \leq \delta^n \|Y_0 - X_0\|,$$

където

$$\delta = \frac{\|A\|^2 + \|B\|^2}{a^2}.$$

Доказателството на теоремата може да се види на стр.47 от дисертационния труд.

Освен това е изследвана една модификация на двустранния метод. Разглеждме алгоритъм:

Алгоритъм 9. *(Алгоритъм 2.2.3.) Нека $X_0 = \alpha I$, $Y_0 = \beta I$ и $Z_0 = \frac{1}{\beta} I$. За $n = 0, 1, \ldots$ пресмятаме*

$$(26) \qquad \begin{cases} Z_{n+1} = Z_n(2I - Y_n Z_n) \\ X_{n+1} = I - A^* X_n^{-1} A + B^* Z_{n+1} B, \quad k = 0, 1, \ldots \\ Y_{n+1} = I - A^* Z_{n+1} A + B^* X_n^{-1} B, \end{cases}$$

За алгоритъм 9 доказваме, че генерира матрични редици, които са сходящи към положително определеното решение на уравнение (2)

Теорема 14. *(Теорема 2.2.4.) Нека числата $\beta > \alpha > 0$, удовлетворяват условията* 1., 2. *и* 3. *на Теорема 13. Матричните редици $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ и $\{Z_n\}$ дефинирани от (26) с начални приближения $X_0 = \alpha I$, $Y_0 = \beta I$ и $Z_0 = \frac{1}{\beta} I$, са сходящи към решението $X_L \in [\alpha I, \beta I]$.*

Доказателството на теоремата може да се видина стр.49 от дисертационния труд.

В параграф 2.3 са представени числени експерименти на три примера, които илюстрират теоретичните резултати. При избор на такива матрици от примерите условията на теорема 9 не са изпълнени и неможем да я приложим. Теорема 11 също не е изпълнена но по нашите теореми 12 и 13 уравнението (2) с тези матрици има единствено положително определено решение.

Изводи:

Представени са предварителните резултати, направени за уравненията (2) и (2) в случай на $Q > 0$. Изказани са теореми, които доказват съществуването на положително определено решение на двете уравнения при определени условия. Duan и др. [7] предлагат условие, при което уравнението (2) има положително определено решение и разглеждат итерационен алгоритъм с метода на последователните приближения. Berzig и др. [6] дават условия, зависещи от два параметъра, при които уравнението (2) в случай на $Q > 0$ има положително определено решение.

Подобрени са Теорема9 [7, Теорема 2.3.] и Теорема11 [6, Theorem 3.2.]. Предложени са отслабени условия върху коефициентите, при които предложеният в [7, 6] двустранен итерационен метод е сходящ.

Изследван е нов итерационен метод за пресмятане на положително определено решение, при който частично се изключва пресмятането на обратна матрица.

Основни приноси във втора глава:

- Направен е подробен обзор на известното досега за матричното уравнение $X + A^* X^{-1} A - B^* X^{-1} B = I$. Подобрени са условията за съществуването на положително определено решение на разгледаното уравнение (доказани от Berzig и др. [6] и Duan и др.[7]);

- Представен е нов итерационен алгоритъм, който води до намиране на положително определено решение на уравнението. Доказана е неговата сходимост.

Публикациите по втора глава от дисертационния труд са:

[18] V. Hasanov and A. Ali, On some sufficient conditions for the existence of a positive definite solution of the matrix equation $X + A^* X^{-1} A - B^* X^{-1} B = I$, AIP Conference Proceedings, V. 1690, 060001, 2015.

[1] Ayur Ali, One iterative method for matrix equation $X + A^* X^{-1} A - B^* X^{-1} B = I$, MATTEX 2016, Conference Proceedings, Vol. 1, 2016, pp. 74-80.

Глава 3. Положително определени решения на матричното уравнение $X - A^*XA - B^*X^{-1}B = I$

Глава 3 е посветена на матричното уравнение (3). Главата е разделена на четири параграфа.

В параграф 3.1 са представени предварителните резултати върху уравнения, мотивирали изследвания ни върху уравнение (3). Това са резултати за уравненията: $X - \sum_{i=1}^{m} A_i^* X_i^{\delta} A_i = Q,\ 0 < |\delta| < 1$ ([9], 2008), $X - \sum_{i=1}^{m} A_i^* X^r A_i = Q$, при $-1 \leq r < 0$ или $0 < r < 1$ ([8], 2009) и $X - A^*X^pA - B^*X^{-q}B = I$ $(0 < p, q < 1)$ ([16], 2017).

В параграф 3.2 получаваме достатъчно условие за съществуване на положително определено решение на матричното уравнение (3) ([2], 2018).

Теорема 15. *(Теорема 3.2.2.) Нека уравнението (3) има положително определено решение X. Тогава*

(i) $\rho(A) < 1$,

(ii) $\rho(X^{-1}B) < 1$,

(iii) $X > M$, *където M е решение на уравнението $X - A^*XA = I$.*

Доказателството на теоремата може дасе види на стр.58 от дисертационния труд.

По-късно Хасанов ([22], 2019) доказва, че достатъчното условие е и необходимо условие за съществуване на положително определено решение на уравнението (3).

Теорема 16. *[22, Theorem 2] Матричното уравнение (3) има положително определено решение X_L тогава и само тогава, когато $\rho(A) < 1$. Освен това всички решение се намират в интервала $[M, N]$, където M и N са единствените решение съответно на матричните уравнение $X - A^*XA = I$ и $X - A^*XA = I + B^*M^{-1}B$.*

В параграф 3.3. представяме няколко итерационни алгоритъма за пресмятането на положително определено решение на уравнение (3).

В точка 3.3.1 за намиране на положително определено решение на уравнение (3) предлагаме двустранен итерационен алгоритъм.

Алгоритъм 10. *(Алгоритъм 3.3.1.) Нека* $X_0 = I$, $Y_0 = \beta I$, $\beta > 1$. *За* $n = 0, 1, \dots$ *пресмятаме*

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{n+1} = I + A^* X_n A + B^* Y_n^{-1} B, \\ Y_{n+1} = I + A^* Y_n A + B^* X_n^{-1} B. \end{array} \right. \tag{27}$$

Доказваме, че при определени условия на матричните коефициенти A и B, то итеационния алгоритъм 10 е сходящ към единственото положително определено решение.

Теорема 17. *(Тееорема 3.3.2.) Ако за матриците* A *и* B *е в сила условието* $\|A\|^2 + \|B\|^2 < 1$, *то уравнението (3) има единствено положително определено решение* X_L. *Освен това итерационния алгоритъм 10 при*

$$\beta \geq \frac{1 + \|B\|^2}{1 - \|A\|^2}$$

е сходящ към единственото положително определено решение $X_L \in [I, \beta I]$.

Доказателството на теоремата може да се види на стр.60 от дисертационния труд.

Хасанов в [22] разглежда алгоритъм 10 с начални приближения $X_0 = M$ и $Y_0 = N$, където матриците M и N са от теорема 16. Изказано е твърдението: ако $\lim_{n\to\infty} \|Y_n - X_n\| = 0$, то уравнението (3) има единствено положително определено решение. Освено това в [22] е разгледан метода на последователните приближения.

Алгоритъм 11. *[22] Нека $\widehat{Z}_0 \in [X_0, Y_0]$. За $n = 0, 1, \ldots$, пресмятаме*

$$\widehat{Z}_{n+1} = I + A^* \widehat{Z}_n A + B^* \widehat{Z}_n^{-1} B, \tag{28}$$

където X_0 и Y_0 са началните стойности от алгоритъм 10.

Хасанов в [22] доказва, че матричните редици $\{\widehat{Z}_n\}$, $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$, дефинирани от (28) и (27) имат следните свойства

$$X_n \le \widehat{Z}_n \le Y_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

В точка 3.3.2. разглеждаме една модификация на алгоритъм 10, която частично изключва обръщане на матрица.

Нека M и N са единствените решения съответно на уравненията $X - A^* X A = I$ и $X - A^* X A = I + B^* M^{-1} B$. Разглеждаме следния алгоритъм:

Алгоритъм 12. *(Алгоритъм 3.3.4.) Нека $X_0 = M$, $Y_0 = N$, ($X_0 = I, Y_0 = \beta I$), $Z_0 = Y_0^{-1}$. За $n = 0, 1, \ldots$ пресмятаме:*

$$\begin{cases} Z_{n+1} = Z_n(2I - Y_n Z_n), \\ X_{n+1} = I + A^* X_n A + B^* Z_{n+1} B, \\ Y_{n+1} = I + A^* Y_n A + B^* X_n^{-1} B. \end{cases} \tag{29}$$

Доказваме достатъчни условия за сходимост на матричните редици, гнерирани от алгоритъм 12.

Теорема 18. *(Теорема 3.3.5.) Матричните редици Z_n, X_n и Y_n, генерирани от алгоритъм 12 имат следните свойства:*

(i) $X_0 \le X_1 \le \ldots \le X_n \le Y_n \le \ldots \le Y_1 = Y_0, \qquad n = 0, 1, \ldots,$

(ii) $Z_0 \le Z_1 \le \ldots \le Z_{n+1} \le Y_n^{-1}, \qquad n = 0, 1, \ldots,$

(iii) $\lim_{n\to\infty} X_n = X_L \le Y_L = \lim_{n\to\infty} Y_n, \quad \lim_{n\to\infty} Z_n = Y_L^{-1}.$

Доказателството на теоремта може да се види на стр.62 от дисертационния труд.

Изводи:

Получено е достатъчно условe за съществуването на решение на уравнението (3)

Предложен е двустранен итерационен алгоритъм за намиране на положително определено решение. Доказана е сходимостта на предложения алгоритъм.

Предложен е нов итерационен алгоритъм, който е една модификация на двустранен итерационен алгоритъм, при който се избягва обръщане на една матрица.

Основни приноси в трета глава:

- Получени са необходими и достатъчни условия за съществуване на положително определено решение на уравнение $X - A^*XA - B^*X^{-1}B = I$;

- Предложен е двустранен итерационен алгоритъм за намиране на положително определено решение. Дадени са достатъчни условия за сходимостта на този итерационен процес;

- Предложен е нов итерационен алгоритъм, който е една модификация на двустранен итерационен алгоритъм, при който се избягва обръщане на една матрица.

Публикациите по трета глава от дисертационния труд са:

[2] Aynur Ali, For matrix equation $X-A^*XA-B^*X^{-1}B = I$, MATTEX 2018, Conference Proceedings, Vol. 1 (2018), pp. 161-166.

[3]A. Ali and V. Hasanov, An iterative method for solving the matrix equation $X - A^*XA - B^*X^{-1}B = I$, Mathematical and Software Engineering, 6 (2020), pp. 1-6.

Апробация на резултатите

Резултатите от дисертационния труд са докладвани и обсъдени на следните научни форуми:

- Семинар на ФМИ на Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“ 2014 г. [19];
- 41st International Conference „Applications of Mathematics in Engineering and Economics“ (AMEE 2015): 8-13 юни 2015, Созопол [18];
- Семинар на ФМИ на Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“ 2015 г. [18];
- Научна конференция с международно участие MATTEX 2016., 2016 г. Шумен [1];
- Научна конференция с международно участие MATTEX 2018, 2018 г. Шумен [2];
- The International Conference „Applied Modeling in Economics, Finance and Social Sciences“ (AMEFSS 2020), от 28 юни до 2 юли, 2020 г. Созопол [3].

Авторска справка

По мнение на автора, основните приноси на дисертационния труд са:

- Доказана е скоростта на сходимост на предложения от Long и др. [28] метод на последователните приближения за уравнението $X + A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B = Q$. Подобрени са оценките за скоростта на сходимост (док. от Vaezzadeh и др. [35]) за две модификации на метода на последователните приближения, при които се избягва обръщане на матрица. Получени са максимално положително определено решение на матричното уравнение.

- Направен е подробен анализ на изученото преди това за матричното уравнение $X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I$. Подобрени са резултатите на X. Duan и др. [7] и M. Berzig и др. [6] за съществуване на положително определено решение на това матрично уравнение. Предложен е нов итерационен метод, който води до намиране на положително определено решение на уравнението. Доказана е неговата сходимост.

- Получено е достатъчно условие за съществуване на положително определено решение на матричното уравнение $X - A^*XA - B^*X^{-1}B = I$. Предложени са два итерационни метода за намиране на положително определено решение, като единият е двустранен метод, а другия е модификация на двустранния метод, където се намалява броя на обръщанията на матрици. Дадени са достатъчни условия за сходимостта на тези методи.

Литература

[1] A. Ali, *One iterative method for matrix equation* $X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I$, MATTEX 2016, Conference Proceedings, 1 (2016), pp. 74–80.

[2] A. Ali, *For matrix equation* $X - A^*XA - B^*X^{-1}B = I$, MATTEX 2018, Conference Proceedings, 1 (2018), pp. 161–166.

[3] ———, *An iterative method for solving the matrix equation* $X - A^*XA - B^*X^{-1}B = I$., Mathematical and Software Engineering, 6 (2020), pp. 1–6.

[4] B.D.O. Anderson, J.B. Moore, *Linear Optimal Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1971.

[5] W. Anderson, T. Morley, and G. Trapp, *Positive Solutions to* $X = A - BX^{-1}B^*$, Linear Algebra Appl., 134 (1990), pp. 53–62.

[6] M. Berzig, X. Duan, and B. Samet, *Positive definite solution of the matrix equation* $X = Q - A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B$ *via Bhaskar-Lakshmikantham fixed point theorem*, Mathematical Sciences, 7 (2012), pp. 6–27.

[7] X.F. Duan, Q.W. Wang, and Ch.M. Li, *Positive definite solution of a class of nonlinear matrix equation*, Linear and Multilinear Algebra, 62(6) (2014), pp. 839–852.

[8] X.F. Duan and A. Liao, *On Hermitian positive definite solution of the matrix equation* $X - \sum_{i=1}^{m} A_i^* X^r A_i = Q$, Journal of Computational and Applied Mathematics, 229 (2009), pp. 27–36.

[9] X.F. Duan and A. Liao and B. Tang, *On the nonlinear matrix equation* $X - \sum_{i=1}^{m} A_i^* X^{\delta_i} A_i = Q$, Linear Algebra and its Applications, 429 (2008), pp. 110–121.

[10] J. Engwerda, *On the existence of a positive definite solution of the matrix equation* $X + A^T X^{-1} A = I$, Linear Algebra Appl,

194 (1993), pp. 91–108.

[11] J. Engwerda, A.C.M. Ran, and A.L. Rijkeboer, *Necessary and sufficient conditions for the existence of a positive definite solution of the matrix equation* $X + A^*X^{-1}A = Q$, Linear Algebra Appl, 186 (1993), pp. 255–275.

[12] A. Ferrante and B. Levy, *Hermitian solution of the equation* $X = Q + NX^{-1}X$, Linear Algebra Appl., pp. 359–373.

[13] M.D. Fragoso, O.L.V. Costa, C.E. de Souza, *A New Approach to Linearly Perturbed Riccati Equations Arising in Stochastic Control*, Appl Math Optim, 37 (1998), 99–126

[14] G. Freiling and A. Hochhaus, *On a class of rational matrix differential equations arising in stochastic control*, Linear Algebra and its Applications 379 (2004) 43–68.

[15] G. Freiling and A. Hochhaus, *Properties of the Solutions of Rational Matrix Difference Equations*, Computer and Matematics with Applications, 45 (2003), pp. 1137–1154.

[16] D. Gao, *Iterative Methods for Solving the Nonlinear Matrix Equation* $X - A^*X^pA - B^*X^{-1}B = I (0 < p, q < 1)$*.*, Advances in Linear Algebra and Matrix Theory, 7 (2017), pp. 72–78.

[17] C. Guo and P. Lancaster, *Iterative solution of two matrix equations* , Math. Comput., 68 (1999), pp. 1589–1603.

[18] V. Hasanov and A. Ali, *On some sufficient conditions for the existence of a positive definite solution of the matrix equation* $X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I$, AIP Conference Proceedings, 1690 (2015), p. 060001.

[19] V. Hasanov and A. Ali, *On convergence of three iterative methods for solving of the matrix equation* $X + A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B = Q$, Computational and Applied Mathematics, 36 (2017), pp. 79–87.

[20] V. Hasanov, *Notes on two perturbation estimates of the extreme solutions to the equations* $X \pm A^*X^{-1}A = Q$, Appl. Math. Comp., 216 (2010), pp. 1355–1362.

[21] V. Hasanov and I. Ivanov, *On two Perturbation Estimates of the Extreme Solutions to the Matrix Equations* $X \pm A^*X^{-1}A = Q$, Linear Algebra Appl., 413 (2006), pp. 81–92.

[22] V. Hasanov, *Necessery and sufficient condition for the existence of a positive definite solution of a matrix equation.*, Annual of Konstantin Preslavsky University of Shumen, XX C (2019),

pp. 13–19.

[23] I. Ivanov, *Iterations for solving a rational Riccati equation arising in stochastic control*, Computers and Mathematics with Applications, 53 (2007), 977–988.

[24] R.E. Kalman, *When Is a Linear Control System Optimal?*, Trans. ASME, J. Basic Engr. 86D (1964), 51-60.

[25] V. Kucera, *The Discrete Riccati Equation of Optimal Control*, Kybernetika, 8(5), (1972), 430-447.

[26] V. Kucera, *A Review of the Matrix Riccati Equation*, Kybernetika, 9(1), (1973), 42-61.

[27] P. Lancaster, L. Rodman, *Algebraic Ricati Equationa*, Clarendom Press, Oxford, 1995.

[28] J.Long, X. Hu, and L. Zhang, *On the Hermitian positive definite solution of the matrix equation* $X + A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B = I$, Bull. Braz. Math. Soc., 39 (2008), pp. 371–386.

[29] K. Martensson, *On the Matrix Riccati Equation*, Ihformation Sciences 3 (1971), 17-49.

[30] B. Meini, *Efficient Computation of the Extreme Solutions of* $X + A^*X^{-1}A = Q$ *and* $X - A^*X^{-1}A = Q$, Math. Comp., 71 (2002), pp. 1189–1204.

[31] M. Ait Rami, X. Zhou, J.B. Moore, *Well-posedness and attainability of indefinite stochastic linear quadratic control in infinite time horizon*, Systems & Control Letters 41 (2000), 123-133

[32] M. Ait Rami, X. Chen, J.B. Moore, X. Zhou, *Solvability and Asymptotic Behavior of Generalized Riccati Equations Arising in Indefinite Stochastic LQ Controls*, IEEE Transactions on Automatic Control, 46 (3), (2001), 428-440

[33] C.E. Souza, M.D. Fragoso, On the existence of maximal solution for generalized algebraic Riccati equations arising in stochastic control, Systems & Control Letters, 14 (1990) 233-239

[34] J.-G.Sun and S.-F.Xu, *Perturbation analysis of the maximal solution of the matrix equation* $X + A^*X^{-1}A = P$*. II*, Linear Algebra Appl., 362 (2003), pp. 211–228.

[35] S. Vaezzadeh, S. Vaezpour, R. Saadati, and C. Park, *The iterative methods for solving nonlinear matrix equation* $X + A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B = Q$, Adcances in Difference Equations,

51 (2014), pp. 739–763.

[36] W.M.Wonhan, *On a matrix Ricati equation of stochastic control*, SIAM J. Control, 6 (1968), pp. 681–697.

[37] X. Zhan, *Computing the Extremal Positive Definite Solution of a Matrix Equation*, SIAM J. Sci. Comput., 17 (1996), pp. 1167–1174.

[38] X. Zhan and J. Xie, *On the Matrix Equation* $X + A^T X^{-1} A = I$, Linear Algebra Appl., 247 (1996), pp. 337–345.

Публикации по дисертационния труд

1. [19] V. Hasanov and A. Ali, On convergence of three iterative methods for solving of the matrix equation $X+A^*X^{-1}A+B^*X^{-1}B = Q$, Computational and Applied Mathematics, 36, (2017), pp. 79-87;
2. [18] V. Hasanov and A. Ali, On some sufficient conditions for the existence of a positive definite solution of the matrix equation $X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I$, AIP Conference Proceedings, V. 1690, 060001, 2015;
3. [1] Ayur Ali, One iterative method for matrix equation $X+A^*X^{-1}A-B^*X^{-1}B = I$, MATTEX 2016, Conference Proceedings, Vol. 1, 2016, pp. 74-80
4. [2] Aynur Ali, For matrix equation $X - A^*XA - B^*X^{-1}B = I$, MATTEX 2018, Conference Proceedings, Vol. 1 (2018), pp. 161-166
5. [3]A. Ali and V. Hasanov, An iterative method for solving the matrix equation $X - A^*XA - B^*X^{-1}B = I$, Mathematical and Software Engineering, 6 (2020), pp. 1-6.

Цитатирани публикации

Цитираните статии от чужди автори са както следва:

1. V. Hasanov and A. Ali, On convergence of three iterative methods for solving of the matrix equation $X + A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B = Q$, Computational and Applied Mathematics, 36, (2017), pp. 79–87;
    1. B.-H. Huang and Ch.-F. Ma, Some iterative methods for the largest positive definite solution to a class of nonlinear matrix equation, Numerical Algorithms, 79, (2018), pp. 153–178;
    2. S. Pakhira, Sn. Bose and Sk M. Hossein, Solution of a Class of Nonlinear Matrix Equations, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 21 (2020);
    3. H. Ali and Sk M. Hossein, On the positive definite solution of a class of pair of nonlinear matrix equations, Computational and Applied Mathematics, 39, (2020), Article number: 102.

2. V. Hasanov and A. Ali, On some sufficient conditions for the existence of a positive definite solution of the matrix equation $X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I$, AIP Conference Proceedings, V. 1690, 060001, 2015;

    1. H. K. Nashine and Sn. Bose, Solution of a class of cross-coupled nonlinear matrix equations, Applied Mathematics and Computation, 362 (2019).

3. Aynur Ali, For matrix equation $X - A^*XA - B^*X^{-1}B = I$, MATTEX 2018, Conference Proceedings, Vol. 1 (2018), pp. 161-166;

    1. V. Hasanov, Necessery and sufficient condition for the existence of a positive definite solution of a matrix equation., Annual of Konstantin Preslavsky University of Shumen, XX C (2019), pp. 13–19.

Благодарности

Бих искала да изразя своята благодарност и признателност към моя научен ръководител проф. д-р Вежди Исмаилов Хасанов за подкрепата, указаната помощ, интерес и внимание към моята работа също така и за съвместната работа, съдействието и отзивчивостта му.

Благодарна съм на колегите ми от катедра Икономика и математическо моделиране към Факултета по математика и информатика на Шуменския университет. Искам да благодаря и на семейството си за търпението и подкрепата им.