ШУМЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ
"ЕПИСКОП КОНСТАНТИН ПРЕСЛАВСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА "АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ"

ЦВЕТЕЛИНА ЛЪЧЕЗАРОВА ДИНКОВА

ОБОБЩЕНИ ФОКАЛНИ ЛИНИИ НА ПРАВИЛНИ ТРИКРАТНО ГЛАДКИ ПРОСТРАНСТВЕНИ ЛИНИИ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация
за придобиване на образователната и научна степен
"доктор"
в докторска програма *Геометрия и топология*;
професионално направление 4.5. *Математика*;
област на висше образование
4. *Природни науки, математика и информатика*

Научен ръководител
Проф. д.н. Георги Христов Георгиев

Шумен
2022 г.

Дисертационният труд е обсъден и предложен за защита на разширено заседание на катедра „Алгебра и геометрия“ към Факултета по математика и информатика на Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“, проведено на 05.12.2022 г.

Дисертационният труд се състои от увод, три глави, авторска справка, списък на публикациите, включени в дисертацията, апробация на резултатите и списък на използваната литература. Използваната литература съдържа 48 заглавия. Общият обем на дисертационния труд е 119 страници.

Номерацията на определенията, теоремите и формулите, както и цитиранията в автореферата съвпадат със съответната номерация на определенията, теоремите, формулите и цитиранията в дисертационния труд.

Публичната защита е насрочена на 10.02.2022 г. от 14 часа в зала 323 в корпус 3 на Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“ на открито заседание на научното жури.

Съдържание

Съдържание **3**

Увод **4**

Обзор на дисертацията **9**

Глава 1. Геометрия на цилиндрични криви над равнинни криви **9**

Глава 2. Фокални линии на геодезични линии върху обобщени цилиндрични повърхнини **15**

Глава 3. Обобщени фокални криви на криви на Френе в тримерно Евклидово пространство **30**

Публикации, включени в дисертацията **42**

Апробация на резултатите **43**

Авторска справка **44**

Литература **46**

Благодарности **50**

Увод

Равнинните и пространствените криви имат различни приложения в различни клонове на инжинерството и архитектурата. Логаритмичната спирална антена и логаритмичната спирална предавка са свързани с известната равнинна крива, наречена логаритмична спирала. Еволвентата на окръжност е друга равнинна спирала с важна роля в машиностроенето (виж Лиу [33], Лиу [34] и Радзевич [41]). Верижката е равнинна крива, чиято форма се появява в конструкциите на мостове и електропроводи. Описание и приложения на верижката могат да бъдат намерени в Люис [31] и Осерман [38]. Цилиндричните винтови линии и коничните такива са пространствени спирали, които са приложими за зъбните предавки и за антените (виж например Чен [11], Тан [44] и Зхоу [48]). Получаването на нова крива от дадена правилна крива е важно средство, използвано в компютърната графика и компютърното моделиране. Примери за такова конструиране на нови линии са офсетовите криви на дадена равна крива и фокалната крива на правилна пространствена крива.

Крива на Френе в n-мерно Евклидово пространство $\mathbb{E}^n$ ($n \geq 3$) е параметрично зададена крива от клас C^n, чиито производни до ред n включително са линейно независими за произволна стойност на параметъра. Такава крива определя базис на Френе, състоящ се от единична допирателна векторна функция $\mathbf{T}$ и $n-1$ единични нормални векторни функции $\mathbf{N}_i$, $i = 1, \ldots, n-1$. За произволна стойност на параметъра, n-торката вектори $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}_1$, $\ldots$, $\mathbf{N}_{n-1}$ образува положително ориентиран ортонормиран базис в $\mathbb{R}^n$. Всяка крива на Френе определя $(n-1)$ реалнозначни функции $\kappa_1 > 0$, $\ldots$, $\kappa_{n-2} > 0$, $\kappa_{n-1} \neq 0$ наречени кривини (известни също като Евклидови кривини или кривини на Френе). Връзките между базиса на Френе и кривините се изразяват с така наречените уравнения на Френе-Серет. Два подхода за определяне на базиса на Френе и изчисляване на криви-

ните на кривите на Френе са представени от Глюк [25] и от Банчов и Ловет [8].

Намирането на фокалната крива на дадена крива на Френе е важна задача в диференциалната геометрия на кривите. Фокалната крива е геометричното място от центрове на оскулачните хиперсфери на дадената крива на Френе. Параметризацията на фокалната крива може да бъде получена чрез параметризацията, главните нормални вектори и кривините на разглежданата крива. Тези и други важни свойства на фокалните криви са разгледани подробно от Урибе-Варгас [46]. По-специално той доказва, че фокалните криви на самоконгруентните криви също са самоконгруентни криви. Има допълнителни резултати, получени при изследването на фокалните криви на различни класове криви на Френе. Енчева и Георгиев [18] показаха, че фокалната крива на всяка самоподобна крива в $\mathbb{E}^n$ също е самоподобна крива в $\mathbb{E}^n$. Озтюрк и Арслан [39] доказват, че фокалната крива на крива в $\mathbb{E}^n$ с постоянни отношения на кривините е също крива с постоянни отношения на кривините. Озтюрк и други [40] изследват фокалните криви на така наречените k-наклонени спирали в $\mathbb{E}^{m+1}$.

Винтовата линия е известна пространствена крива, която има забележителни свойства. Тази крива лежи върху кръговия цилиндър и допирателният ѝ вектор в произволна нейна точка сключва постоянен ъгъл с оста на цилиндъра. Кривината и торзията на винтовата линия са ненулеви константи. Съществува обобщение на винтовата линия, което се нарича цилиндрична спирала или обобщена винтова линия. Тази пространствена крива, лежаща върху цилиндъра, има допирателен вектор, който сключва постоянен ъгъл с постоянно направление. Изумия и Такеучи изследват цилиндричните спирали [27]. В друга тяхна статия [29] те въвеждат нов клас линии, които наричат наклонени (slant) спирали. Наклонената спирала е правилна линия, на която главният нормален вектор в произволна точка от линията сключва постоянен ъгъл с постоянно направление. Също така Изумия и Такеучи показват, че всяка винтова линия е и наклонена спирала, тъй като главният нормален вектор на линията в произволна нейна точка е перпендикулярен на оста ѝ. Съществуват много приложения на винтовата линия в математиката, физиката и техническите науки (виж [10], стр. 378).

През последното десетилетие различни криви, свързани с крива на Френе в $\mathbb{E}^3$, са били обширно проучени. Чой и Ким [12] изследваха някои интегрални криви, наречени главни (бинормални) упра-

вителни криви и главни (бинормални) донор-криви, които са криви свързани, с крива на Френе в $\mathbb{E}^3$. Те получиха връзките между кривината и торзията на базисната крива и кривината и торзията на споменатите по-горе криви. Те също така характеризират специални криви, известни като обобщени винтови линии (или обобщени спирали) и наклонени спирали, по отношение на главните (бинормални) управителни криви и главните (бинормални) донор криви. Наскоро Дешмук и други [14] получиха връзки между няколко класа криви на Френе в $\mathbb{E}^3$. Един от техните интересни резултати е, че съществува еднозначно определена винтова линия (кръгова спирала), т.е. крива с постоянни ненулеви кривина и торзия, която е свързана с неспирална крива в $\mathbb{E}^3$ от клас C^k, $k \geq 4$, т.е. крива с непостоянно отношение на торзия към кривина. По този начин са представени нови характеристики на наклонените спирали, кривите на Салковски, сферичните криви и ректифициращите криви. Свързаните криви с кривите на Френе в $\mathbb{E}^3$ също са изследвани и в статии [15], [35], [37] и [13].

Естествено възниква въпросът, ако разширим класа на обобщените винтови линии до класа на цилиндричните криви, какви биха били връзките между диференциално геометричните инварианти на този клас криви и съответните им фокални линии. Ако класа на цилиндричните криви е получен директно от равнинни криви чрез добавяне на трета координатна функция $f(t)$, можем ли да намерим връзки между диференциално-геометричните инварианти на пораждащата равнинна крива, съответната ѝ цилиндрична крива и нейната фокална. А ако пораждащата крива е пространствена, какви биха били тези връзки. Целта на този дисертационен труд е да даде отговор на тези въпроси.

Дисертацията е организирана в три глави. В първата глава **Геометрия на цилиндрични криви над равнинни криви** изследваме тип цилиндрични криви, получени директно от равнинни криви. Първите две координатни функции на такава цилиндрична крива съвпадат с координатните функции на равнинната крива. Третата координатна функция на тази пространствена крива е или параметъра t на кривата, или подходяща негова функция. Класът на така получените цилиндрични криви съдържа в себе си класа на обобщените винтови линии. Ние изследваме връзките между диференциално-геометричните инварианти на равнинната крива и диференциално-геометричните инварианти на съответната ѝ цилиндрична крива. Нещо повече, получаваме и параметричното представяне на фокал-

ните криви на тези цилиндрични криви. Глава 1 е организирана по следния начин. Първата част е посветена на изследването на диференциално-геометричните инварианти на цилиндричните криви по отношение на групата на евклидовите движения и групата на директните подобности. Във втората част е представен алгоритъм за конструирането на фокални криви на цилиндрични криви. В третата част представяме обобщена конструкция на цилиндрична крива и извеждаме диференциално-геометричните ѝ инварианти чрез тези на равнинната крива. В последната част разглеждаме изображенията между класове цилиндрични криви и техните фокални криви.

Във втората глава **Фокални криви на геодезични линии върху обобщени цилиндрични повърхнини**, равнинна крива, отнесена към естествен параметър, е свързана с еднозначно определена правилна пространствена крива. Предложената конструкция може да бъде разделена в три основни стъпки. Първо, дадената равнинна крива, отнесена към естествен параметър, се параметризира повторно, така че кривата с новата параметризация има допирателен вектор с постоянна дължина $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Второ, ние дефинираме еднозначно определена пространствена линия, отнесена към естествен параметър, която е геодезична върху правия обобщен цилиндър над равнината крива, чиито допирателен вектор има постоянна дължина $\frac{1}{\sqrt{2}}$. На трето място, изследваме фокалната крива на така получената геодезична крива. По точно, намираме параметричното представяне на фокалната крива и изразяваме нейните кривина и торзия чрез равнинната кривина на равнинната крива, допирателният вектор на която има постоянна дължина $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Кривината и торзията са инварианти на правилна пространствена крива по отношение на групата на евклидовите движения, запазващи ориентацията на тримерното евклидово пространство $\mathbb{E}^3$. Изследваме и инвариантите на разглежданата геодезична крива и нейната фокална, спрямо групата на директните подобности. Тези инварианти се наричат шейп кривина и шейп торзия.

Глава 2 е организирана по следния начин. В началото, припомняме определения и свойства на диференциално геометрични инварианти на равнинни и правилни пространствени криви (виж Станилов [1]). След това описваме основната конструкция за определяне на правилна пространствена крива от дадена равнинна крива, отнесена към естествен параметър. Изразяваме в явен вид връзките между равнинната кривина на първоначална равнинна кри-

ва и диференциално-геометричните инварианти на получената нова пространствена крива. В продължението обсъждаме няколко илюстративни примера. Накрая завършваме със заключителни бележки.

В трета глава **Обобщени фокални криви на криви на Френе в тримерно Евклидово пространство** представяме нова конструкция на параметризирана крива в $\mathbb{E}^3$, получена от дадена крива на Френе от клас $\mathcal{C}^4$ в $\mathbb{E}^3$, отнесена спрямо естествен параметър. Тази конструкция е разделена на три последователни части. В началото, дадената крива в $\mathbb{E}^3$ поражда крива на Френе в $\mathbb{E}^4$, отнесена спрямо естествен параметър. След това фокалната крива в $\mathbb{E}^4$ на получената крива в $\mathbb{E}^4$ може да се определи параметрично. И накрая, ортогоналната проекция на тази фокална крива във фиксирана хиперравнина в $\mathbb{E}^4$ се идентифицира с крива в $\mathbb{E}^3$, наречена обобщена фокална крива на дадена крива на Френе в $\mathbb{E}^3$. Преминаването от крива на Френе в $\mathbb{E}^3$ към крива на Френе в $\mathbb{E}^4$ зависи от типа на първоначалната крива. Разглеждаме следните три типа криви на Френе в $\mathbb{E}^3$:
1. Неспирални криви, тоест криви на Френе, за които отношението на торзия към кривина е различно от константа;
2. Обобщени спирали (обобщени винтови линии), различни от кръговите спирали (винтовите линии), тоест криви на Френе чиито, кривина и торзия са различни от константа, но отношението на торзия към кривина е равно на константа;
3. Кръгови спирали (винтови линии), тоест криви на Френе с ненулеви кривина и торзия равни на константа.
Предложената конструкция е придружена от подробен алгоритъм и подходящи примери.

Глава 3 е организирана по следния начин. В първия раздел са описани дефиниции и основни факти относно кривите на Френе и техните фокални криви в Евклидовите пространства $\mathbb{E}^3$ и $\mathbb{E}^4$. След това е представена конструкция, в три стъпки, за определяне на параметризирана пространствена крива от дадена крива на Френе в $\mathbb{E}^3$, отнесена спрямо естествен параметър. Основната част от тази конструкция, т.е. получаването на крива на Френе в $\mathbb{E}^4$ от крива на Френе в $\mathbb{E}^3$, е подробно описана. Конструкцията е придружена от алгоритъм, който обхваща всички случаи на крива на Френе в $\mathbb{E}^3$. В продължението са разгледани три илюстративни примера, като главата завършва със заключителни бележки.

Обзор на дисертацията

Дисертацията се състои от увод и 3 глави. Следва кратко представяне на получените резултати.

Глава 1. Геометрия на цилиндрични криви над равнинни криви

В първата глава са изследвани тип цилиндрични криви, получени директно от равнинни криви. Първите две координатни функции на такава цилиндрична крива съвпадат с координатните функции на равнинната крива. Третата координатна функция на тази пространствена крива е или параметъра t на кривата, или подходяща негова функция. Класът на така получените цилиндрични криви съдържа в себе си класа на обобщените винтови линии. Изследвани са връзките между диференциално-геометричните инварианти на равнинната крива и диференциално-геометричните инварианти на съответната ѝ цилиндрична крива. Нещо повече, получено е и параметричното представяне на фокалните криви на тези цилиндрични криви. Глава 1 е организирана по следния начин. Първата част е посветена на изследването на диференциално-геометричните инварианти на цилиндричните криви по отношение на групата на евклидовите движения и групата на директните подобности. Във втората част е представен алгоритъм за конструирането на фокални криви на цилиндрични криви. В третата част е представена обобщена конструкция на цилиндрична крива и са изведени диференциално-геометричните ѝ инварианти, чрез тези на равнинната крива. В последната част са разгледани изображенията между класове цилиндрични криви и техните фокални криви.

Определение 1.1.1 Нека $\alpha = \alpha(t),\ t \in I \subseteq \mathbb{R}$ е равнинна C^3 крива в евклидовата равнина $\mathbb{E}_2 \equiv O\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2$ с векторно параметрично уравнение $\alpha(t) = (x(t),\, y(t),\, 0)$, параметризирана относно произволен параметър $t \in I$. Тогава пространствената крива $\gamma = \gamma(t),\, t \in I$ с параметрично представяне

$$(1) \qquad \gamma(t) = (x(t),\, y(t),\, b.t) = \alpha(t) + b.t.\vec{\mathbf{e}}_3, \qquad b = const$$

ще наричаме *цилиндрична крива над равнинната крива* $\alpha(t)$.

Цилиндричната спирала (обобщената винтова линия) е правилна пространствена крива в $\mathbb{E}^3$, чиито допирателни вектори сключват постоянен ъгъл с постоянно направление. Не е трудно да се пока-

же,че произволна цилиндричната спирала (обобщената винтова линия) има параметризация от вида (1).

Следващата теорема дава отговор на въпроса можем ли да намерим връзка между евклидовите кривина $\varkappa = \varkappa(t)$ и торзия $\tau = \tau(t)$ на цилиндричната крива $\gamma = \gamma(t), t \in I$ и равнинната кривина $K = K(t)$ на съответната равнинна крива $\alpha = \alpha(t), t \in I$. Понататък в тази глава, диференцирането относно произволен параметър е означено с "$\cdot$", а диференцирането спрямо естествения параметър на кривата с "$\prime$".

Теорема 1.1.2 *Нека $\gamma = \gamma(t), t \in I$ е цилиндрична крива с уравнение (1), където $\alpha = \alpha(t), t \in I$ е съответната ѝ равнинна крива. Ако $\varkappa = \varkappa(t)$ и $\tau = \tau(t)$ са кривината и торзията на γ, и $K = K(t)$ е равнинната кривина на α , то*
(2)

$$\varkappa(t) = \frac{\sqrt{A(t)}}{(\sqrt{\dot{s}^2 + b^2})^3}, \quad \tau(t) = \frac{b.\dot{s}.\left[K.\left(3.\ddot{s}^2 - \dot{s}.\dddot{s} + K^2.\dot{s}^4\right) + \dot{K}.\dot{s}.\ddot{s}\right]}{A(t)},$$

където $s = s(t)$ е естествения параметър на α и $A(t) = K^2.\dot{s}^4.(\dot{s}^2 + b^2) + b^2.\ddot{s}^2$.

Следствие 1.1.3 *Нека $\alpha = \alpha(s), s \in I$ е равнинна крива в $\mathbb{E}^2$, отнесена към естествен параметър s и нека $\gamma = \gamma(s) = \alpha(s) + b.s.\vec{e}_3$, $s \in I$ е съответната ѝ цилиндрична крива. Ако $\varkappa$ и τ са евклидовите кривина и торзия на γ и K е равнинната кривина на α, то $\varkappa = \frac{|K|}{1+b^2}$, $\tau = \frac{b.K}{1+b^2}$, $b = const$.*

Условието $\dfrac{\tau}{\varkappa} = const$ характеризира обобщените винтови линии. Използвайки последното следствие, всяка обобщена винтова линия можем да я разглеждаме като цилиндрична крива над произволна равнинна крива, отнесена към естествен параметър.

Диференциално-геометричните инварианти на правилна крива относно групата на директните подобности са функции, наречени шейп кривини (виж [18] и [20]). Главна роля при изследването на тези инварианти играе естественият параметър σ на сферичната индикатриса на кривата. Ще наричаме този параметър сферичен. Ако шейп кривините на дадена крива са известни функции на сферичен параметър, то те определят кривата в Евклидовото пространство с точност до директна подобност. Обичайно, шейп кривините в Евклидовото пространство $\mathbb{E}^3$ се наричат шейп кривина и шейп торзия.

Следствие 1.1.5 *Нека $\alpha = \alpha(\sigma)$, $\sigma \in I$ е равнинна крива $\mathbb{E}^2$, параметризирана относно сферичен параметър σ, и нека $\gamma = \gamma(\sigma) = \alpha(\sigma) + b.\sigma.\vec{e}_3$, $\sigma \in I$ е съответната цилиндрична крива на α. Ако $\widetilde{\varkappa}$ и $\widetilde{\tau}$ са шейп кривината и шейп торзията на γ и $\widetilde{K}$ е шейп кривината на α, то*

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\varkappa}(\sigma) &= -\frac{\widetilde{K}.\left[-1 + b^2.K^2\left(-2.\widetilde{K}^2 + \dot{\widetilde{K}}\right) + b^4.K^4.\left(1 + \widetilde{K}^2 + \dot{\widetilde{K}}\right)\right]}{\left[1 + b^2.K^2.\left(1 + \widetilde{K}^2\right)\right]^{3/2}} \\
\widetilde{\tau}(\sigma) &= \frac{b.|K|.\left(1 + b^2.K^2\right)^{3/2}.\left(1 + \widetilde{K}^2 - \dot{\widetilde{K}}\right)}{\left[1 + b^2.K^2.\left(1 + \widetilde{K}^2\right)\right]^{3/2}},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

където K е Евклидовата кривина на α.

Фокални криви и фокални кривини на гладка крива в $m+1$-мерно евклидово пространство $\mathbb{E}^{m+1}$ са въведени от Урибе-Варгас в [46]. Нека $\gamma : I \to \mathbb{E}^{m+1}$ е гладка крива, параметризирана относно естествен параметър s. Нека да предположим, че евклидовите кривини на тази крива, $k_1, k_2, \ldots, k_m$ са ненулеви функции и $\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_m$ е базиса й на Френе. Центровете на оскулачните сфери на кривата $\gamma = \gamma(s)$ определят нова крива $C_\gamma : I \to \mathbb{E}^{m+1}$, зададена чрез

$$C_\gamma(s) = \gamma(s) + c_1\mathbf{n}_1 + c_2\mathbf{n}_2 + \ldots + c_m\mathbf{n}_m.$$

Кривата C_γ, определена чрез горното равенство, ще наричаме фокална крива на γ, а коефициентите $c_1, c_2, \ldots, c_m$ са гладки функции, наречени фокални кривини на γ. Да отбележим, че фокалната крива C_γ е добре дефинирана тогава и само тогава, когато кривата γ не е сферична крива, тоест не лежи върху хиперсферата в $\mathbb{E}^{m+1}$. Според теорема 2 в [46], връзките между евклидовите и фокалните кривини на кривата $\gamma = \gamma(s)$ се задават чрез

$$k_i = \frac{c_1.c_1^{'} + c_2.c_2^{'} + \ldots + c_{i-1}.c_{i-1}^{'}}{c_{i-1}.c_i} \quad \text{за} \quad i \geq 2.$$

Първата фокална кривина c_1 никога не се нулира и се определя с равенството $c_1 = \dfrac{1}{k_1}$.

Понятията шейп кривина и шейп торзия на правилна крива в $\mathbb{E}^3$ имат естествено обобщение за правилна крива в $\mathbb{E}^{m+1}$. Всъщност съществуват m на брой гладки функции $\widetilde{k}_1, \widetilde{k}_2, \ldots, \widetilde{k}_m$ които определят кривата $\gamma : I \to \mathbb{E}^{m+1}$ с точност до директна подобност. Тези функции се наричат шейп кривини (виж [18] или глава 6 [20]). Връзките между фокалните кривини и шейп кривините на γ могат да бъдат записани във вида $\widetilde{k}_1 = c_1^{'}, \widetilde{k}_i = \dfrac{c_1}{c_{i-1}c_i}(c_1.c_1^{'}+c_2.c_2^{'}+\ldots+c_{i-1}.c_{i-1}^{'}), i \geq 2$.

Разглежданията, направени по-нататък в тази глава са за криви в $\mathbb{E}^2$ и $\mathbb{E}^3$.

Нека $\gamma : I \to \mathbb{E}^3$ е гладка крива от C^3 параметризирана относно произволен параметър t. Нека да означим евклидовите кривини на тази крива с $\kappa_1(t) = \varkappa(t) > 0$ и $\kappa_2(t) = \tau(t) \neq 0$. В [17] са доказани следните формули за шейп кривините

$$\begin{aligned} \widetilde{\kappa}_1 &= \widetilde{\varkappa} = \frac{3\|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}\|^2\langle\dot{\gamma},\ddot{\gamma}\rangle - \|\dot{\gamma}\|^2\langle\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma},\dot{\gamma}\times\dddot{\gamma}\rangle}{\|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}\|^3} \\ \widetilde{\kappa}_2 &= \widetilde{\tau} = \frac{\tau}{\varkappa} = \frac{\|\dot{\gamma}\|^3.\det(\dot{\gamma},\ddot{\gamma},\dddot{\gamma})}{\|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}\|^3}. \end{aligned} \tag{4}$$

Прилагайки добре известната формула за центровете на оскулачните сфери на крива в $\mathbb{E}^3$, параметризирана относно произволен параметър t (виж [8, стр. 82]), е получено параметричното представяне на фокалната крива на γ

$$C_\gamma(t) = \gamma(t) + c_1\mathbf{n}_1 + c_2\mathbf{n}_2, \tag{5}$$

където $\mathbf{n}_1$ е единичният главен нормален вектор на γ, $\mathbf{n}_2$ е единичният бинормален вектор на γ, $c_1 = \dfrac{1}{\kappa_1}$ и $c_2 = \dfrac{\widetilde{\kappa}_1}{\kappa_2}$. Разгледаните цилиндрични криви принадлежат на класа C^3. Следователно можем да асоциираме фокалната крива (5) с всяка цилиндрична крива над равнинна крива от клас C^3. Със следващия алгоритъм е илюстрирано получаването на такава асоциирана крива.

Алгоритъм 1.2.1 *Метод за конструиране на фокална крива на дадена цилиндрична крива.*

1. *Пресмятаме производните* $\dot{\gamma} = \frac{d}{dt}\gamma(t)$, $\ddot{\gamma} = \frac{d^2}{dt^2}\gamma(t)$ *и* $\dddot{\gamma} = \frac{d^3}{dt^3}\gamma(t)$.
2. *Ако* $\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma} \neq (0,0,0)$ *за произволна стойност на* t, *пресмятаме единичния бинормален вектор* $\mathbf{n}_2$, *единичния главен нормален*

вектор $\mathbf{n}_1$ *и продължаваме със стъпка 3, в противен случай отиваме на стъпка 6.*

3. *Пресмятаме кривината* κ_1 *и торзията* κ_2 *на* γ.

4. *Ако* $\kappa_2 \neq 0$, *то от формули (4) получаваме шейп кривината* $\widetilde{\kappa}_1$ *и продължаваме със стъпка 5, в противен случай отиваме на стъпка 6.*

5. *Параметричното уравнение на фокалната крива на* γ *е*

$$C_\gamma(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa_1}\mathbf{n}_1 + \frac{\widetilde{\kappa}_1}{\kappa_2}\mathbf{n}_2, \tag{6}$$

6. *Фокалната крива не съществува.*

Така получените резултати са разширени до по-широк клас цилиндрични криви.

Теорема 1.3.1 *Нека* $\alpha(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I \subset \mathbb{R}$ *е правилна равнинна крива от клас* C^3 *с ненулева равнинна кривина и нека* $f(t) \in C^3$ *е скаларна функция. Предполагаме, че* $\vec{\mathbf{e}}_3$ *е е единичният вектор върху оста* Oz *и* $\gamma(t) = \alpha(t) + f(t)\vec{\mathbf{e}}_3, \quad t \in I$ *е параметризирана пространствена крива. Тогава,* $\gamma(t)$ *е правилна крива, чиито кривина и торзия се получават от равенствата*

$$\varkappa = \frac{\sqrt{\left\langle \ddot{\alpha}, J\dot{\alpha}\right\rangle^2 + \left\langle \dddot{f}\dot{\alpha} - \dot{f}\dddot{\alpha}, \ddot{f}\dot{\alpha} - \dot{f}\ddot{\alpha}\right\rangle}}{\left(\sqrt{\left\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha}\right\rangle + \dot{f}^2}\right)^3} \tag{7}$$

$$\tau = \frac{\dddot{f}\left\langle \ddot{\alpha}, J\dot{\alpha}\right\rangle + \ddot{f}\left\langle -J\dot{\alpha}, \dddot{\alpha}\right\rangle + \dot{f} < \left\langle J\ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}\right\rangle}{\left\langle \ddot{\alpha}, J\dot{\alpha}\right\rangle^2 + \left\langle \ddot{f}\dot{\alpha} - \dot{f}\ddot{\alpha}, \ddot{f}\dot{\alpha} - \dot{f}\ddot{\alpha}\right\rangle}. \tag{8}$$

Нека $\alpha(t) = (ae^c \cos t, ae^{ct} \sin t)$, $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$ е логаритмична спирала и нека $f(t) = be^{ct}$, $b > 0$, $c > 0$, $t \in \mathbb{R}$ е скаларна функция на t. Разгледана е цилиндричната крива върху логаритмична спирала

$$\gamma(t) = \left(a\, e^{ct} \cos t, a\, e^{ct} \sin t, b\, e^{ct}\right), \tag{9}$$

където a, b и $c \in \mathbb{R}$ са положителни константи . Кривата γ притежава постоянни шейп кривина и торзия

$$\widetilde{\kappa}_1{}^{\gamma} = \widetilde{\varkappa}^{\gamma} = \frac{c\sqrt{a^2 + (a^2 + b^2)\, c^2}}{a\sqrt{1 + c^2}},\ \widetilde{\kappa}_2{}^{\gamma} = \widetilde{\tau}^{\gamma} = \frac{bc}{a\sqrt{1 + c^2}}. \tag{10}$$

Такъв вид пространствена крива се нарича самоподобна. Други представяния на самоподобни криви са разгледани в ([17]) и ([18]). Следващата теорема обобщава получените свойства на разгледаната цилиндрична крива γ и нейната фокална крива C_γ.

Теорема 1.3.2 *Цилиндричната крива $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$ с параметрично представяне (9) е самоподобна пространствена крива с постоянни шейп кривина $\widetilde{\varkappa}^{\gamma}$ и шейп торзия $\widetilde{\tau}^{\gamma}$, които са ненулеви и определени от (10). Фокалната крива $C_\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$ на γ също е самоподобна пространствена крива с постоянни ненулеви шейп кривина $\widetilde{\varkappa}^{C} = \dfrac{\widetilde{\varkappa}^{\gamma}}{\widetilde{\tau}^{\gamma}}$ и шейп торзия $\widetilde{\tau}^{C} = \dfrac{1}{\widetilde{\tau}^{\gamma}}$.*

Следващите твърдения описват изображенията между дадена пространствена крива и съответната ѝ фокална крива.

Твърдение 1.5.1 *Нека $\gamma = \gamma(s)$ е винтова линия, параметризирана спрямо естествен параметър s, а $C_\gamma = C_\gamma(s)$ е съответната ѝ фокална крива. Тогава*

а) изображението $F : \gamma(s) \to C_\gamma(s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$ е инволютивно изображение, т.е. F е различно от идентитета $\mathcal{I}$ в пространството и $F \circ F = F^2 = \mathcal{I}$, тогава и само тогава, когато евклидовите кривини k_1 и k_2 на γ са равни;

б) фокалната крива на C_γ е кривата γ.

Твърдение 1.5.2 *Нека $\gamma = \gamma(s)$ е обобщена винтова линия, параметризирана спрямо естествен параметър s, а $C_\gamma = C_\gamma(s)$ е съответната ѝ фокална крива. Ако фокалната кривина $c_2 = const$ на γ е константа, то фокалната крива $C_{\widetilde{\gamma}}$ на $\widetilde{\gamma} = C_\gamma$ и кривата γ са еквивалентни с точност до движение в пространството.*

Твърдение 1.5.3 *Фокалната крива на конична спирала е конична спирала.*

Ако $\gamma = \gamma(s)$ е правилна линия с ненулева кривина k_1, то казваме, че γ е крива на Бертранд, ако съществува друга крива, на която

главните нормали съвпадат с тези на γ в съответните им точки (виж [9]). Интересни свойства на винтовите линии и на кривите на Бертранд са получени и в [27].

Теорема 1.5.4 *Нека $C_\gamma^{(1)}$ е фокалната крива на правилна линия $\gamma = \gamma(s)$, параметризирана спрямо естествен параметър s, а $C_\gamma^{(i)}$ е фокалната крива на кривата $C_\gamma^{(i-1)}$, $i \in \mathbb{N}, i \geq 2$. . Тогава*
(11)

$$\frac{k_1^{(i)}}{\left|k_2^{(i-1)}\right|} = \frac{\left|k_2^{(i)}\right|}{k_1^{(i-1)}} = \frac{1}{\left|\left(c_2^{(i-1)}\right)' + c_1^{(i-1)} k_2^{(i-1)}\right|}, \text{ за всяко } i \in \mathbb{N},\ i \geq 1,$$

където $k_1^{(i)}$, $k_2^{(i)}$ са евклидовите кривини, а $c_1^{(i)}$, $c_2^{(i)}$ са фокалните кривини на кривата $C_\gamma^{(i)}$, за $i \geq 1$. С $k_1^{(0)}$, $k_2^{(0)}$ са означени евклидовите кривини, а с $c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$ са означени фокалните кривини на линията γ .

Следствие 1.5.5 *Кривите γ и $C_\gamma^{(i)}$ за $i \geq 1$ са криви на Бертранд.*

За представяне на преобразованията в следващото твърдение са използвани така наречените хомогенни координати. Ако X е точка с координати (x, y, z) спрямо координатната система $Oxyz$, то наредената ненулева четворка от числа (x_1, x_2, x_3, x_4), определена с точност до ненулев множител, където $x = \frac{x_1}{x_4}, y = \frac{x_2}{x_4}, z = \frac{x_3}{x_4}, x_4 \neq 0$ се нарича хомогенни координати на точката X.

Твърдение 1.5.6 *Нека $\gamma = \gamma(s)$ е винтовата линия, параметризирана спрямо естествен параметър s, а $C_\gamma = C_\gamma(s)$ е съответната ѝ фокална крива. Тогава изображението $\varphi : \gamma_s \to C_{\gamma_s}$, при което триедъра на Френе t, n, b на кривата γ в точка $\gamma(s)$ се изобразява в триедъра на Френе T, N, B на фокалната ѝ крива C_γ в точката $C_\gamma(s)$ т.е. $\varphi(t, n, b)_{\gamma(s)} = (T, N, B)_{C_\gamma(s)}$ е инволютивно изображение.*

Резултатите от Глава 1 са публикувани в [23] *Geometry of cylindrical curves over plane curves*, Applied Mathematical Sciences (SJR-0.35(2015)) и [2] *Фокални криви в Евклидово пространство*, Сборник научни трудове, том 1 (2014), стр. 67-75 и са докладвани на конференцията MATTEX 2014 Шумен.

Глава 2. Фокални линии на геодезични линии върху обобщени цилиндрични повърхнини В тази глава, равнинна крива, отнесена към естествен параметър е свързана с еднозначно определена правилна пространствена крива. Предложена е конст-

рукция, която може да бъде разделена в три основни стъпки. Първо, дадената равнинна крива, отнесена към естествен параметър, се параметризира повторно, така че кривата с новата параметризация да има допирателен вектор с постоянна дължина $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Второ, дефинира се еднозначно определена пространствена линия, отнесена към естествен параметър, която е геодезична върху правия обобщен цилиндър над равнината крива, чиито допирателен вектор има постоянна дължина $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Трето, изследва се фокалната крива на така получената геодезична крива. По точно, намерено е параметричното представяне на фокалната крива и са изразени нейните кривина и торзия чрез равнинната кривина на равнинната крива с допирателен вектор с постоянна дължина $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Кривината и торзията са инварианти на правилна пространствена крива по отношение на групата на евклидовите движения, запазващи ориентацията на тримерното евклидово пространство $\mathbb{E}^3$. Изследвани са и инвариантите на разглежданата геодезична крива и нейната фокална, спрямо групата на директните подобности. Тези инварианти се наричат шейп кривина и шейп торзия.

Глава втора е организирана по следния начин. В началото са припомнени определения и свойства на диференциално геометрични инварианти на равнинните и пространствените правилни криви. След това е описана основната конструкция за определяне на правилна пространствена крива по дадена равнинна крива, отнесена към естествен параметър. Изразени са в явен вид връзките между равнинната кривина на първоначална равнинна крива и диференциално геометричните инварианти на получената нова пространствена крива. В продължението са обсъдени няколко илюстративни примера. Накрая се завършва със заключителни бележки.

Някои кратки сведения за Евклидовите движения, запазващи ориентацията и директни подобности. Нека $\mathbb{E}^n$ $(n = 2, 3)$ е n-мерното Евклидово пространство. Неговите елементи са точки, чиито радиус вектори са представени с вектор-стълбове $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Афинното изображение $\Phi : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ се нарича запазващо ориентацията Евклидово движение, ако Φ запазва разстоянието между произволни две точки от $\mathbb{E}^n$ и ориентацията на $\mathbb{E}^n$. Запазващите ориентацията евклидови движения образуват група, която е подгрупа на групата на всички афинни изображения, запазващи ориентацията. Директна подобност или подобност запазваща ориентацията, е афинно изображение $\Psi : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, което запазва ориентацията и ъглите. Всяка директна

подобност притежава представяне в матрична форма

$$\Psi(x) = \rho Ax + b, \tag{12}$$

където $\mathbf{x}$ е радиус - векторът на произволна точка в $\mathbb{E}^n$, $\Psi(\mathbf{x})$ е радиус - векторът на неговото изображение в $\mathbb{E}^n$, $\rho > 0$ е константа, $\mathbf{A}$ е фиксирана $n \times n$ ортогонална матрица с $det(\mathbf{A}) = 1$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ е вектор на транслация. Директната подобност (43) е евклидово движение, запазващо ориентацията, тогава и само тогава, когато $\rho = 1$. По този начин множеството от всички директни подобности в $\mathbb{E}^n$ образува също подгрупа на групата на афинните изображения, запазващи ориентацията и тази подгрупа е най-малкото разширение на групата на запазващите ориентацията евклидови движения.

Образът на всяка параметризирана крива в евклидовата равнина $\mathbb{E}^2$ под действието на афинните изображения, запазващи ориентацията на $\mathbb{E}^2$, е също параметризирана крива в $\mathbb{E}^2$.

Нека $\zeta : I \to \mathbb{E}^2$ е правилна равнинна крива от клас C^3, която е дефинирана в отворения интервал $I \subseteq \mathbb{R}$ чрез

$$\zeta = (x(t), y(t))^T \qquad t \in I, \tag{13}$$

където $(*, *)^T$ е транспонираният вектор на вектора ред $(*, *)$, а $x(t)$ и $y(t)$ са координатните ѝ функции. Ако обозначим с "$'$ "диференцирането по отношение на параметъра t, то тогава векторите

$$\zeta^{'}(t) = (x^{'}(t), y^{'}(t))^T$$

$$\zeta^{''}(t) = (x^{''}(t), y^{''}(t))^T$$

$$\zeta^{'''}(t) = (x^{'''}(t), y^{'''}(t))^T$$

съществуват. Дължината на първия вектор $\|\zeta^{'}(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ се нарича *скорост* на кривата ζ. Казваме, че кривата ζ е гладка, ако $\zeta^{'}(t)$ е ненулев вектор или $\|\zeta^{'}(t)\| \neq 0$ за $\forall t \in I$. Равнинната кривина

$$K_\zeta(t) = \frac{det(\zeta^{'}(\mathbf{t}), \zeta^{''}(\mathbf{t}))}{||\zeta^{'}(t)||^3} = \frac{x^{'}(t)y^{''}(t) - x^{''}(t)y^{'}(t)}{(\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2})^3} \tag{14}$$

на кривата с параметрично представяне (13) е инвариантна относно запазващите ориентацията евклидови движения в $\mathbb{E}^2$. Окръжността е правилна равнинна крива, чиято кривина е ненулева константа.

Подробно описание на свойствата на $K_\zeta(t)$ е дадено във всеки учебник за криви и повърхнини (виж. например Грей [26]). Ако $K_\zeta(t) \neq 0$ за $\forall \in I$ и ако $K_\zeta^{'}(t) = \frac{d}{dt}K_\zeta(t)$, то функцията

$$\widetilde{K}_\zeta(t) = \frac{1}{\|\zeta'(t)\|}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{K_\zeta(t)}\right) = -\frac{K_\zeta^{'}(t)}{\|\zeta'(t)\|(K_\zeta(t))^2} \tag{15}$$

се нарича *шейп кривина*. Тази функция е инвариантна при произволна директна подобност в $\mathbb{E}^2$. В допълнение, $\widetilde{K}_\zeta(t)$ определя (локално) еднозначно равнинната крива ζ с точност до директна подобност. Тези твърдения са доказани от Енчева и Георгиев в статии [16], [18]. Окръжността е равнинна крива, чиято шейп кривина е равна на нула. Логаритмичната спирала е правилна равнинна крива, чиято шейп кривина е ненулева константа. Тази крива има много инженерни приложения (виж например Лиу [32], Шер [42] и Ху [47].)

Ако дължината $\|\zeta^{'}(t)\|$ е равна на 1 за всяко $\forall t \in I$, тогава ζ се нарича *крива, отнесена спрямо естествен параметър*, а векторно-параметричното уравнение (13) се нарича *параметрично представяне относно естествен параметър* на ζ. Съгласно теорема 16.1 в учебника на Грей [26] всяка правилна равнинна крива притежава параметризация относно естествен параметър. В случай на такава параметризация, формулите (14) и (15) са сведени до по-прости форми.

Лема 2.1.1 *Нека $\alpha_1 : I_1 \to \mathbb{E}^2$ е крива, отнесена спрямо естествен параметър, с векторно-параметричното уравнение*

$$\alpha_1(s) = (x_1(s), y_1(s))^T, \qquad s \in I_1 \subseteq \mathbb{R}. \tag{16}$$

Нека $h : \mathbf{R} \to \mathbb{R}$ е линейно изображение, определено чрез $h(s) = \sqrt{2}s$ за $s \in \mathbb{R}$. Тогава съществува друга параметризация $\alpha : I \to \mathbb{E}^2$ на α_1 такава, че $I = h(I_1)$ и

$$\alpha(t) = \alpha_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) = \left(x_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right), y_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)\right)^T, \qquad t \in I \subseteq \mathbb{R}. \tag{17}$$

Освен това, кривата α има допирателен вектор с постоянна дължина $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Нещо повече:

а) точковите множества $\alpha_1(s), s \in I_1$ и $\alpha(s), t \in I$ съвпадат;

б) знаковите кривини $K_1(s)$ на α_1 и $K_\alpha(t)$ на α са свързани с равенството $K_1(s) = K_\alpha(t)$ за $s = \frac{1}{\sqrt{2}}t$;

в) шейп кривините $\widetilde{K}_1(s)$ *на* α_1 *и* $\widetilde{K}_\alpha(t)$ *на* α *са свързани с равенството* $\widetilde{K}_1(s) = \widetilde{K}_\alpha(t)$ *за* $s = \frac{1}{\sqrt{2}}t$.

След това е разгледана цилиндрична повърхнина и пространствена геодезична линия върху нея, които са свързани с дадена равнина крива с допирателен вектор с постоянна дължина. Гладката, правилна крива в равнината Oxy е базисна линия (или пораждаща) за правия обобщен цилиндър, чиито образуващи са успоредни на оста Oz. Според глава 18 в учебника на Грей [26] всяка геодезична линия върху такъв цилиндър е крива, чиито допирателни вектори имат постоянна дължина и сключват постоянен ъгъл с оста Oz. Нека $\alpha_{\mathbf{c}} : I \to \mathbb{E}^3$ е правилна линия от клас $\mathcal{C}^3$ в равнината Oxy с параметрично представяне

$$\alpha_{\mathbf{c}}(t) = (x(t), y(t), 0)^T, \quad t \in I \tag{18}$$

с допирателен вектор с постоянна дължина

$$\|\alpha_c^{'}(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = c > 0. \tag{19}$$

Очевидно, линията $\alpha_{\mathbf{c}}$ можем да разглеждаме като обичайна равнинна линия. От (14) за равнинната кривина на $\alpha_{\mathbf{c}}$ получаваме

$$K_{\alpha c}(t) = \frac{1}{c^3}(x^{'}(t)y^{''}(t) - y^{'}(t)x^{''}(t)). \tag{20}$$

Ако равнинната кривина $K_{\alpha c}(t)$ е ненулева за всяко $t \in I$, то тогава шейп кривината (15) на $\alpha_{\mathbf{c}}$ е

$$\widetilde{K}_{\alpha c}(t) = -\frac{K_{\alpha c}^{'}(t)}{c(K_{\alpha c}(t))^2} = -\frac{c^2(x^{'}(t)y^{'''}(t) - y^{'}(t)x^{'''}(t))}{(x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t))^2} \tag{21}$$

Правият, еднозначно определен, обобщен цилиндър над така определената крива $\alpha_{\mathbf{c}}$ е гладка повърхнина $S_{\alpha c}$ с параметрично представяне

$$\mathbf{r}_{\alpha c}(u, v) = (x(u), y(u), v)^T, \quad (u, v) \in I \times \mathbb{R}. \tag{22}$$

Тъй като векторното произведение

$$\frac{d}{du}(\mathbf{r}_{\alpha c}(u, v)) \times \frac{d}{dv}(\mathbf{r}_{\alpha c}(u, v)) = (y^{'}(u), -x^{'}(u), 0)^T$$

е различно от $(0,0,0)^T$ за произволни $(u,v) \in I \times \mathbb{R}$, то повърхнината $S_{\alpha c}$ е гладка. Със следващото твърдение са описани семейство от пространствени геодезични линии върху $S_{\alpha c}$.

Твърдение 2.1.2 *Нека $\alpha_c : I \to \mathbb{E}^3$ е правилна параметризирана линия* (18) *в равнината Oxy, с допирателен вектор с постоянна дължина $c > 0$ и нека $S_{\alpha c}$ е обобщения цилиндър върху $\alpha_{\mathbf{c}}$, определен с уравнение* (22). *Да предположим, че $\alpha_{\mathbf{c}}$ е линия от клас $\mathcal{C}^3$ с ненулева кривина $K_{\alpha c}$ за всяко $t \in I$. Тогава, за всеки две реални константи $p \neq 0$ и q, съществува правилна пространствена линия $\gamma_c : I \to \mathbb{E}^3$ определена от*

$$\boldsymbol{\gamma}_c(t) = (x(t), y(t), pt+q)^T, \quad t \in I, \tag{23}$$

която е геодезична върху $S_{\alpha c}$. Освен това, кривината и торзията на $\gamma_{\mathbf{c}}$ се определят съответно чрез функциите

$$\kappa_{1\gamma_c}(t) = \frac{c^2}{p^2+c^2}|K_{\alpha c}(t)| > 0, \tag{24}$$

$$\kappa_{2\gamma_c}(t) = \frac{pc}{p^2+c^2}K_{\alpha c}(t) \neq 0. \tag{25}$$

Използвайки уравнение (24) и (25) са изразени шейп кривината $\tilde{\kappa}_{1\gamma_c}(t)$ и шейп торзията $\tilde{\kappa}_{2\gamma_c}(t)$ на $\boldsymbol{\gamma}_c$ чрез равнинната кривина $K_{\alpha c}$ и шейп кривината $\widetilde{K}_{\alpha c}$ на $\boldsymbol{\alpha}_c$, а именно

(26)

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_{1\gamma_c}(t) &= \frac{1}{\|\gamma_c'(t)\|}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\kappa_{1\gamma_c}(t)}\right) = \frac{1}{\sqrt{p^2+c^2}}\cdot\frac{p^2+c^2}{c^2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{(K_{\alpha c}(t))^2}}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{p^2+c^2}}{c^2}\cdot\frac{K_{\alpha c}^{'}(t)K_{\alpha c}(t)}{K_{\alpha c}^2(t)|K_{\alpha c}(t)|} = \frac{p^2+c^2}{c}\widetilde{K}_{\alpha c}(t)sign(K_{\alpha c}(t)),\end{aligned}$$

$$\tilde{\kappa}_{2\gamma_c}(t) = \frac{\kappa_{2\gamma_c}(t)}{\kappa_{1\gamma_c}(t)} = \frac{p}{c}sign(K_{\alpha c}(t)), \tag{27}$$

където $sign(K_{\alpha c}(t))$ е знакът на функцията $K_{\alpha c}(t)$.

Определение 2.2.2 Линията $\boldsymbol{\gamma}_c$ от твърдение 2.1.2 се нарича *геодезична* от тип (p,q,c) върху обобщения цилиндър $S_{\alpha c}$.

Теорема 2.2.3 *Нека $\boldsymbol{\alpha}$ е правилна линия в равнината Oxy, с допирателен вектор с постоянна дължина $\frac{1}{\sqrt{2}}$, параметризирана с* (18) *и ненулева равнинна кривина $K_\alpha(t)$. Нека S_α е обобщения цилиндър над $\boldsymbol{\alpha}$, зададен с* (22). *Да предположим, че геодезичната линия $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{E}^3$ от тип $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ върху S_α е зададена с* (23), *за $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $q = 0$. Тогава, $\boldsymbol{\gamma}$ е пространствена линия, отнесена спрямо естествен параметър, и нейната фокална линия $\boldsymbol{C}_\gamma : I \to \mathbb{E}^3$ има кривина*

$$K_1 = \frac{|K_\alpha(t)|}{2\left|\frac{K_\alpha(t)}{|K_\alpha(t)|} + 4\left[\left(\frac{1}{|K_\alpha(t)|}\right)' \cdot \frac{1}{K_\alpha(t)}\right]'\right|} \tag{28}$$

и торзия

$$K_2 = \frac{(K_\alpha(t))}{2\left|\frac{K_\alpha(t)}{|K_\alpha(t)|} + 4\left[\left(\frac{1}{|K_\alpha(t)|}\right)' \cdot \frac{1}{K_\alpha(t)}\right]'\right|} \tag{29}$$

.

Комбинирайки лема 2.1.1 и теорема 2.2.3 е дефинирана еднозначно определена пространствена линия, съответна на произволна равнинна линия, параметризирана спрямо естествен параметър.

Алгоритъм 2.2.4 *Конструиране на пространствена линия по дадена равнинна линия, параметризирана спрямо естествен параметър.*

Вход: *Равнинната линия в равнината Oxy, отнесена спрямо естествен параметър, с векторно-параметрично уравнение*

$$\boldsymbol{\alpha}_1(s) = (x_1(s), y_1(s), 0)^T, \quad s \in I_1 \subseteq \mathbb{R} \tag{30}$$

и ненулева равнинна кривина $K_{\alpha_1}(s) = x_1'(s)y_1''(s) - x_1''(s)y_1'(s)$.

1. *Ако $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е линейно изображение зададено с $h(s) = \sqrt{2}s = t$ за $s \in \mathbb{R}$, $x(t) = x_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)$ и $y(t) = y_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)$, тогава определяме линията $\boldsymbol{\alpha}$ в равнината Oxy с параметрично представяне*

   $$\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\alpha}_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) = (x(t), y(t), 0)^T, \quad t \in I = h(I_1) \subseteq \mathbb{R}, \tag{31}$$

   която има допирателен вектор с постоянна дължина $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. *Пресмятаме равнинната кривина* $K_\alpha(t)$ *на* $\boldsymbol{\alpha}$.

3. *Определяме с помощта на уравнение* (23) *геодезичната линия* $\boldsymbol{\gamma}$, *отнесена спрямо естествен параметър, върху правия обобщен цилиндър* S_α *над* $\boldsymbol{\alpha}$.

4. *Чрез уравнения* (24) *и* (25) *пресмятаме кривината* $\kappa_{1\gamma}$ *и торзията* $\kappa_{2\gamma}$ *на* $\boldsymbol{\gamma}$.

5. *Намираме векторите от триедъра на Френе за* $\boldsymbol{\gamma}$.

6. *Получаваме векторно-параметричното уравнение на фокалната линия* $\boldsymbol{C}_\gamma$ *на* $\boldsymbol{\gamma}$.

7. *Ако* $A(t) \neq 0$, *то чрез формули* (28) *и* (29) *пресмятаме кривината* K_1 *и торзията* K_2 *на* $\boldsymbol{C}_\gamma$, *в противен случай линията* $\boldsymbol{C}_\gamma$ *не е правилна.*

Изход: *Векторно-параметричното уравнение на пространствената линия* $\boldsymbol{C}_\gamma$. *Кривината и торзията на* $\boldsymbol{C}_\gamma$, *когато линията е правилна.*

Определение 2.2.5 Линията $\boldsymbol{C}_\gamma$ от описания по-горе алгоритъм, се нарича *асоциирана пространствена линия* на равнинната линия $\boldsymbol{\alpha}_1$, отнесена спрямо естествен параметър.

Сравнявайки уравнения (24) с (28) и (29) е забелязано, че линиите $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{C}_\gamma$ имат общо свойство. Абсолютната стойност на торзията на $\boldsymbol{\gamma}$ (съответно $\boldsymbol{C}_\gamma$) е равна на кривината на $\boldsymbol{\gamma}$ (съответно $\boldsymbol{C}_\gamma$). С други думи, шейп торзията (27) на $\boldsymbol{\gamma}$ (съответно шейп торзията на $\boldsymbol{C}_\gamma$) е равна на ± 1.

Построяването на нова крива от дадена правилна крива е важна задача в класическата диференциална геометрия. По нататък са разгледани цилиндрични спирали, породени от равнинни линии от клас C^3, отнесени спрямо естествен параметър, и техните фокални линии. Всяка равнинна линия, отнесена спрямо естествен параметър, е еднозначно определена с точност до евклидово движение в $\mathbb{E}^2$ чрез равнинната си кривина K. Всяка равнинна крива с ненулева кривина е напълно определена с точност до директна подобност, чрез друга функция $\widetilde{K}$, наречена шейп кривина. За всяка правилна параметризирана крива $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(t) : I \longrightarrow \mathbb{E}^2$ шейп кривината $\widetilde{K}(t)$ е изразена чрез $\widetilde{K}(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{K(t)}\right) / \left\|\dfrac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt}\right\|$. Аналогично, всяка пространствена крива, отнесена спрямо естествен параметър, се определя

еднозначно с точност до Евклидово движение в $\mathbb{E}^3$ чрез кривината си $\kappa_1 \geq 0$ и торзията си κ_2. Ако $\kappa_1 > 0$, тази крива е напълно определена с точност до директна подобност от други функции $\widetilde{\kappa}_1$ и $\widetilde{\kappa}_2$ наречени съответно шейп кривина и шейп торзия. Всяка правилна пространствена параметрична крива $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(t) : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$ има шейп кривина и шейп торзия, дефинирани чрез функциите

$$\widetilde{\kappa}_1(t) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\kappa_1(t)}\right)}{\left\|\frac{d\boldsymbol{\gamma}(t)}{dt}\right\|} \quad \text{и} \quad \widetilde{\kappa}_2(t) = \frac{\kappa_2(t)}{\kappa_1(t)}. \tag{32}$$

Геометрията на кривите, по отношение на запазващите ориентацията евклидови движения, е напълно представена от Грей [26]. Елементи от теорията на кривите, свързана с директните подобности, са разгледани от Енчева и Георгиев в [16], [17] и [18]. Съществуват специални пространствени криви, наречени *обобщени винтови линии* или *цилиндрични спирали* със свойството $\dfrac{\kappa_2(t)}{\kappa_1(t)} = const.$ Тези криви са изследвани в [27] и [28]. Съществува добре позната конструкция за получаване нова пространствена крива от дадена пространствена крива.

В раздел 2.3. е описана конструкция, която е разделена на три стъпки. Първо, е получена цилиндричната спирала от дадената равнинна крива в равнината Oxy, параметризирана спрямо естествен параметър. Второ, определена е фокалната крива на получената цилиндрична спирала. Трето, изследвана е ортогоналната проекция на фокалната крива върху равнината xy.

Нека $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(s)$, $s \in I \subseteq \mathbb{R}$ е правилна C^3-равнинна крива, в Евклидовата равнина $\mathbb{E}^2 \equiv O\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2$ с векторно параметрично уравнение $\boldsymbol{\alpha}(s) = (x(s), y(s), 0)$, параметризирано относно естествен параметър $s \in I$. Равнинната кривина на $\boldsymbol{\alpha}$ е функцията

$$K = < \boldsymbol{\alpha}'', J\boldsymbol{\alpha}' > = x'(s).y''(s) - x''(s).y'(s), \tag{33}$$

където J е комплексната структура в $\mathbb{R}^2$ и "$< \cdot, \cdot >$"е каноничното скаларното произведение на два вектора. Дефинирана е нова пространствена крива $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(s)$, $s \in I \subseteq \mathbb{R}$ в Евклидовото пространство $\mathbb{E}^3 \equiv O\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3$ с параметрично представяне

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = (x(s), y(s), as + b) = \boldsymbol{\alpha}(s) + (as + b)\vec{\mathbf{e}}_3, \quad a, b = const. \tag{34}$$

Тази крива лежи върху обобщения цилиндър $S_{\boldsymbol{\alpha}}$ с базисна крива $\boldsymbol{\alpha}(s)$ и образуващи успоредни на оста z. Кривината и торзията на $\boldsymbol{\gamma}$ са определени чрез

$$\kappa_1 = \frac{|K|}{1+a^2} \text{ и } \kappa_2 = \frac{a.K}{1+a^2}\,, \tag{35}$$

където K е равнинната кривина на $\boldsymbol{\alpha}$.

Със следващото твърдение е дадена връзка между фокалните кривини на $\boldsymbol{\gamma}$ и равнинната кривина на $\boldsymbol{\alpha}$.

Теорема 2.3.4 *Нека $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(s)$, $s \in I$ е C^3-равнинна крива в $\mathbb{E}^2$, отнесена спрямо естествен параметър, с равнинна кривина $K \neq 0$. Нека $\boldsymbol{\gamma}(s)$ е пространствена крива, дефинирана с* (34)*. Ако c_1 и c_2 са фокалните кривини на $\boldsymbol{\gamma}$, то*

$$c_1 = \frac{1+a^2}{|K|} \;\; и \;\; c_2 = -\frac{\sqrt{1+a^2}\;{}^3.K'}{a.|K|^3}, \tag{36}$$

където $a = const$ е косинуса на ъгъла, който допирателните вектори на $\boldsymbol{\gamma}$ сключват с единичния координатен вектор $\vec{\mathbf{e}}_3$.

Със следващите твърдения е дадена явна връзка между фокалните кривини и шейп кривините на цилиндричната спирала и шейп кривината на пораждащата я равнинна крива.

Следствие 2.3.5 *Връзките между шейп кривината $\widetilde{\kappa}_1$ и шейп торзията $\widetilde{\kappa}_2$ на цилиндричната спирала $\boldsymbol{\gamma}$, породена от C^3-равнинна крива $\boldsymbol{\alpha}$, отнесена спрямо естествен параметър, и шейп кривината $\widetilde{K}$ на $\boldsymbol{\alpha}$, са*

$$\widetilde{\kappa}_1 = \sqrt{1+a^2}|\widetilde{K}| \quad и \quad \widetilde{\kappa}_2 = \varepsilon a.$$

Следствие 2.3.6 *Връзката между фокалните кривини на цилиндричната спирала $\boldsymbol{\gamma}$ с векторно-параметрично уравнение* (34) *и шейп кривината на пораждащата C^3-равнинна крива $\boldsymbol{\alpha}$, отнесена спрямо естествен параметър, е*

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\widetilde{K}. \tag{37}$$

Със следващата теорема е дадено параметричното представяне на фокалните криви на цилиндричните спирали, породени от равнинни криви, параметризирани спрямо естествен параметър, чрез векторните и скаларните инварианти на горе споменатите равнинни криви.

Теорема 2.3.7 *Нека* $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(s)$, $s \in I$ *е* C^3*-равнинна крива в* $\mathbb{E}^2$, *параметризирана спрямо естествен параметър, и нека* $K \neq 0$ *е равнинната ѝ кривина. Да предположим, че* $\boldsymbol{\gamma}(s)$ *е цилиндричната спирала, дефинирана с уравнение* (34). *Тогава фокалната крива* $\mathbf{C}_\gamma$ *на* $\boldsymbol{\gamma}$ *има векторно-параметрично представяне*
(38)
$$\mathbf{C}_\gamma(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + \frac{(1+a^2)K'}{K^3}\mathbf{T} + \frac{1+a^2}{K}\mathbf{N} + \frac{(as+b)aK^3 - (1+a^2)K'}{aK^3}\vec{\mathbf{e}}_3,$$
където $\mathbf{T}$ *и* $\mathbf{N}$ *са векторите на Френе на* $\boldsymbol{\alpha}$.

Определение 2.3.8 Фокалната крива $\mathbf{C}_\gamma$ на $\boldsymbol{\gamma}$ с параметрично представяне (38) наричаме, *асоциирана пространствена крива* на равнинната крива $\boldsymbol{\alpha}$ с ненулева равнинна кривина.

Следващата теорема дава явна връзка между кривината и торзията на асоциираната пространствена крива и равнинната кривина и шейп кривината на $\boldsymbol{\alpha}$.

Теорема 2.3.9 *Кривината* K_1 *и торзията* K_2 *на асоциираната крива* $\mathbf{C}_\gamma$ *на отнесената към естествен параметър* C^3*- равнинна крива* $\boldsymbol{\alpha}$ *с равнинна кривина* $K \neq 0$ *и шейп кривина* $\widetilde{K}$ *се задават с*
(39)
$$K_1 = \frac{a^2|K|}{(1+a^2)\left|a^2 + (1+a^2)\left(\frac{\widetilde{K}}{K}\right)'\right|} \; и \; K_2 = \frac{aK}{(1+a^2)\left(a^2 + (1+a^2)\left(\frac{\widetilde{K}}{K}\right)'\right)}.$$

Следствие 2.3.10 *Кривата* $\mathbf{C}_\gamma$ *асоциирана с* C^3*-равнинната крива* $\boldsymbol{\alpha}$, *отнесена към естествен параметър, е цилиндрична спирала.*

Теорема 2.3.11 *Шейп кривината* $\widetilde{K}_1$ *и шейп торзията* $\widetilde{K}_2$ *на асоциираната крива* $\mathbf{C}_\gamma$ *на* C^3*-равнинната крива* $\boldsymbol{\alpha}$, *отнесена към естествен параметър, с равнинна кривина* $K \neq 0$ *и шейп кривина* $\widetilde{K}$ *се задават с*

$$\widetilde{K}_1 = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\left|\widetilde{K} + \frac{\frac{(1+a^2)}{K}\left(\frac{\widetilde{K}}{K}\right)''}{a^2 + (1+a^2)\left(\frac{\widetilde{K}}{K}\right)'}\right| \quad и \quad \widetilde{K}_2 = \frac{\delta}{\varepsilon a}, \tag{40}$$

където $\varepsilon = sign(K)$ *и* $\delta = sign\Big(a^2 + (1+a^2)\Big(\frac{\widetilde{K}}{K}\Big)'\Big)$.

Определение 2.3.12 Ортогоналната проекция на асоциираната крива $\mathbf{C}_\gamma$ върху равнината $\mathbb{E}^2 = Oxy$ ще наричаме ***обобщена фокална крива*** на равнинната крива $\boldsymbol{\alpha}$, и ще означаваме с $\boldsymbol{\beta}$.

Въз основа на уравнение (38), е изведено уравнението на обобщената фокална крива на кривата $\boldsymbol{\alpha}$

$$\boldsymbol{\beta}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) - \frac{(1+a^2)\widetilde{K}}{K}\boldsymbol{\alpha}' + \frac{1+a^2}{K}J\boldsymbol{\alpha}'. \tag{41}$$

Разгледани са няколко илюстративни примера на пространствени линии, асоциирани с равнинни линии, чиято параметризация относно дължината на дъгата е известна. Стандартен метод за получаването на параметризация спрямо дължината на дъгата или естествена параметризация е представен от Ту в [45], гл. 1, стр. 10. В **първия пример** е получена пространствена линия, асоциирана с окръжност в равнината Oxy с център координатното начало и радиус $r = a > 0$. Асоциираната с окръжността $\boldsymbol{\alpha}_1$ пространствена крива $\boldsymbol{C}_\gamma$ или фокалната крива на $\boldsymbol{\gamma}$ е част от винтова линия с параметрично представяне

$$\boldsymbol{C}_\gamma(t) = \left(-a\cos\left(\frac{t}{a\sqrt{2}}\right), -a\sin\left(\frac{t}{a\sqrt{2}}\right), \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^T, \quad t \in [0, 2\sqrt{2}\pi a).$$

Кривината и торзията на $\boldsymbol{C}_\gamma$ са равни на $\frac{1}{2a}$ за всяка стойност на t. Нещо повече, ротация около остта Oz на ъгъл π изобразява кривата $\boldsymbol{\gamma}$ в кривата $\boldsymbol{C}_\gamma$.

Във **втория пример** е получена пространствена линия, асоциирана с логаритмична спирала, зададена с

$$\lambda(u) = (ae^{bu}\cos(u), ae^{bu}\sin(u)), \quad u \in (-\infty, +\infty),$$

където a и b са реални ненулеви константи. От твърдение 2.1.2 е получена естествената параметризация на геодезичната линия от тип $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ върху цилиндъра S_α и е показано, че тя е конична спирала.

Показано е, че фокалната линия $\boldsymbol{C}_\gamma$ на $\boldsymbol{\gamma}$ е правилна пространствена линия с допирателен вектор с постоянна дължина $|A(t)| = \frac{1}{2}(1+2b^2)$, кривина $K_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2b^2(1+2b^2)}t} > 0$ и торзия

$K_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}(1+2b^2)bt} \neq 0$. Следователно и шейп кривината и шейп торзията на $\boldsymbol{C}_\gamma$ са ненулеви константи. Тоест, асоциираната крива $\boldsymbol{C}_\gamma$ с логаритмичната спирала $\boldsymbol{\alpha}_1$, отнесена спрямо естествен параметър, е също конична спирала. Сравнявайки параметричните уравнения на коничните спирали $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{C}_\gamma$, е показано, че съществува директна подобност в $\mathbb{E}^3$, която изобразява $\boldsymbol{\gamma}$ в $\boldsymbol{C}_\gamma$. Тази подобност е композиция от ротация около оста Oz на ъгъл π и хомотетия в $\mathbb{E}^3$, определена с матрицата

$$\begin{pmatrix} 1+2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2b^2 \end{pmatrix}.$$

Освен това е показано,че $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{C}_\gamma$ лежат върху конуса с уравнение $x^2 + y^2 = \frac{1+b^2}{b^2} z^2$. При $a = 1$ и $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ коничните спирали $\boldsymbol{\gamma}$ в $\boldsymbol{C}_\gamma$ имат съответно кривина и торзия, както следва:

$$\kappa_{1\gamma}(t) = \frac{1}{t},\ \kappa_{2\gamma}(t) = -\frac{1}{t},\ K_1(t) = \frac{1}{2t} \text{ и } K_2 = -\frac{1}{2t}.$$

Като следствие, $\frac{\kappa_{2\gamma}(t)}{\kappa_{1\gamma}(t)} = \frac{K_2(t)}{K_1(t)} = -1$. Части от тези конични спирали, дефинирани в интервала $(0, 2\pi]$, са изобразени на фигура 2.1.

В **пример три**, използвайки алгоритъм 2.2.4 е намерена пространствена линия, асоциирана с инволюта на окръжност в равнината Oxy с център координатното начало и радиус $a > 0$. От изведените параметрични представяния на геодезичната и асоциираната линия и получените Евклидови инварианти е направен следният извод:

(а) $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{C}_\gamma$ са линии, отнесени спрямо естествен параметър;

(б) $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{C}_\gamma$ имат съответно равни кривина и торзия. В допълнение, $\dfrac{\kappa_{2\gamma}(t)}{\kappa_{2\gamma}(t)} = \dfrac{K_2(t)}{K_1(t)} = 1.$

(в) Съществува еднаквост в $\mathbb{E}^3$, която трансформира $\boldsymbol{\gamma}$ в $\boldsymbol{C}_\gamma$. Тази еднаквост е композиция от ротация около оста z на ъгъл π и транслация в $\mathbb{E}^3$, определена от вектор $(0, 0, 2a)^T$.

Във фиг. 2.2 са изобразени части от кривите $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{C}_\gamma$ дефинирани в интервала $(-6\pi, 6\pi)$, в случая когато $a = \frac{1}{6}$.

В **пример четири** е намерена пространствената линия, асоциирана с верижката $y = a.\cosh\left(\dfrac{x}{a}\right)$, $-a \leq x \leq a$ за коя да е реална

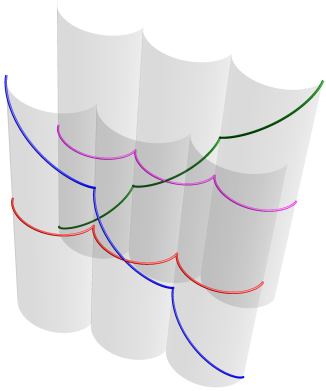
положителна константа a. В учебника на Грей [26, p.47] е показано, че тази равнинна линия, разглеждана в равнината Oxy, притежава параметризация относно естествен параметър. Прилагайки алгоритъм 2.2.4, е определена асоциираната пространствена крива $\boldsymbol{C}_\gamma$ на верижката. На фиг. 2.3 са изобразени линиите $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{C}_\gamma$ и $\boldsymbol{\beta}$ при $a = 1$. Получено е, че отношението на евклидовите инварианти на асоциираната пространствена крива е 1.

В **пример пет** е намерена обобщената фокална линия на циклоидата $\boldsymbol{\alpha}_0(t) = (c.(t + \sin t), c.(1 + \cos t), 0), \quad c = const > 0, t \in \mathbb{R}$. Параметричното представяне на един неин клон $\boldsymbol{\alpha}_0$, спрямо естествен параметър s, е

(42)

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \left(\frac{s\sqrt{16c^2 - s^2}}{8c} + 2c \arcsin\left(\frac{s}{4c}\right), \frac{16c^2 - s^2}{8c}, 0 \right), -4.c \leq s \leq 4.c$$

Интерес представлява получения от нас резултат, че обобщената фокална линия $\boldsymbol{\beta}$ на циклоидата, също е циклоида с параметризация относно естествен параметър. Очевидно е, че линията $\boldsymbol{\beta}$ може да бъде получена от линията $\boldsymbol{\alpha}$ чрез транслация, определена от вектора $\vec{\mathbf{p}} = (0, -4c(1 + a^2), 0)$.



Фигура 1. Циклоидата $\boldsymbol{\alpha}$ в червено, обобщената фокална крива $\boldsymbol{\beta}$ в лилаво, цилиндричната спирала $\boldsymbol{\gamma}$ в синьо, асоциираната крива $\mathbf{C}_\gamma$ на $\boldsymbol{\alpha}$ в зелено

И накрая, но не на последно място, са намерени обобщените фокални линии на затворени равнинни линии с периодична равнинна

кривина. Нека $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(s)$ е равнинна крива с периодична равнинна кривина $K(s) = \dfrac{m}{n} - \sin s$, параметризирана спрямо естествен параметър s, където $m \in \mathbb{Z}, n > 1, n \in \mathbb{N}$ и $(m, n) = 1$. Такава крива е въведена и изследвана от Аройо в [7]. За функцията $\theta(s)$ е получено, че $\theta(s) = \displaystyle\int K(s)ds + \theta_0 = \frac{\pi}{2} + \cos s + \frac{m}{n}s$, откъдето е изведено параметричното представяне на $\boldsymbol{\alpha}$ спрямо естествен параметър

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \left(\int \cos\left(\frac{\pi}{2} + \cos s + \frac{m}{n}s\right)ds, \int \sin\left(\frac{\pi}{2} + \cos s + \frac{m}{n}s\right)ds, 0 \right)$$

От уравнение (34) следва, че съответната цилиндрична спирала има параметризация, спрямо която допирателният вектор има постоянна дължина

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = \left(\int \cos\left(\frac{\pi}{2} + \cos s + \frac{m}{n}s\right)ds, \int \sin\left(\frac{\pi}{2} + \cos s + \frac{m}{n}s\right)ds, as + b \right)$$

и от уравнение (38) е получена асоциираната крива на $\boldsymbol{\alpha}(s)$

$$\mathbf{C}_\gamma(s) = (-\textstyle\int \sin\left(\frac{ms}{n} + \cos s\right) ds + A(s), \int \cos\left(\frac{ms}{n} + \cos s\right) ds - B(s), \\ as + b + C(s)).$$

Тогава обобщената фокална крива $\boldsymbol{\beta}$ на $\boldsymbol{\alpha}(s)$ има параметризация $\boldsymbol{\beta}(s) = \left(-\int \sin\left(\frac{ms}{n} + \cos s\right) ds + A(s), \int \cos\left(\frac{ms}{n} + \cos s\right) ds - B(s), 0\right)$.

Очевидно е, че асоциираната фокална $\mathbf{C}_\gamma$ може да се получи от $\boldsymbol{\gamma}$ чрез матричната функция $T_{\vec{\mathbf{r}}(s)}$ в хомогенни координати

$$(T_{\vec{\mathbf{r}}(s)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A(s) \\ 0 & 1 & 0 & B(s) \\ 0 & 0 & 1 & C(s) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

На фиг. 2.5 са изобразени затворената крива $\boldsymbol{\alpha}$ за $m = 1$ и $n = 5$ в червено и нейната цилиндрична спирала $\boldsymbol{\gamma}$ в синьо. На фиг. 2.6 са изобразени фокалната крива на $\boldsymbol{\gamma}$ в зелено. На фиг. 2.7 са изобразени равнинната крива $\boldsymbol{\alpha}$ с част от нейната обобщена фокална крива $\boldsymbol{\beta}$ в лилаво.

Резултатите от тази глава са публикувани в [21] *Focal curves of geodesics on generalized cylinders*, ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences (SJR-0.238(2019)), 14 (2019), pp. 2058-2068 и [24] *A visualization and a shape characterisation of a class of cylindrical helices*, MATTEX 18, Proceedings of the international conference, 1 (2018), pp.

57-64 и са докладвани на конференцията MATTEX 2018 Шумен. Статия [21] е цитирана от Алтъбани [4] и [5].

Глава 3. Обобщени фокални криви на криви на Френе в тримерно Евклидово пространство

Тук е представена нова конструкция на параметризирана крива в $\mathbb{E}^3$, получена от дадена крива на Френе в $\mathbb{E}^3$, параметризирана спрямо естествен параметър, от клас $\mathcal{C}^4$. Тази конструкция е разделена на три последователни части. В началото, дадената крива в $\mathbb{E}^3$ поражда крива на Френе в $\mathbb{E}^4$, отнесена спрямо естествен параметър. След това фокалната крива в $\mathbb{E}^4$ на получената крива в $\mathbb{E}^4$ може да се определи параметрично. И накрая, ортогоналната проекция на тази фокална крива във фиксирана хиперравнина в $\mathbb{E}^4$ се идентифицира с крива в $\mathbb{E}^3$, наречена обобщена фокална крива на дадена крива на Френе в $\mathbb{E}^3$. Преминаването от крива на Френе в $\mathbb{E}^3$ към крива на Френе в $\mathbb{E}^4$ зависи от типа на първоначалната крива. Разгледани са следните три типа криви на Френе в $\mathbb{E}^3$:
1. Неспирални криви, тоест криви на Френе, за които отношението на торзия към кривина е различно от константа;
2. Обобщени спирали (обобщени винтови линии), различни от кръговите спирали (винтовите линии), тоест криви на Френе, чиито кривина и торзия са различни от константа, но отношението на торзия към кривина е равно на константа;
3. Кръгови спирали (винтови линии), тоест криви на Френе с ненулеви кривина и торзия равни на константа.
Предложената конструкция е придружена от подробен алгоритъм и подходящи примери.

Нека $\mathbb{E}^n$ $(n = 2, 3)$ е n-мерното Евклидово пространство. Неговите елементи са точки, чиито радиус-вектори са представени с вектор-стълбове $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Афинното изображение $\Phi : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ се нарича запазващо ориентацията Евклидово движение, ако Φ запазва разстоянието между произволни две точки от $\mathbb{E}^n$ и ориентацията на $\mathbb{E}^n$. Запазващите ориентацията евклидови движения образуват група, която е подгрупа на групата на всички афинни изображения, запазващи ориентацията.

Директна подобност или подобност, запазваща ориентацията, е афинно изображение $\Psi : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, което запазва ориентацията и ъглите. Всяка директна подобност притежава представяне в матрична форма

$$\Psi(x) = \rho A x + b, \tag{43}$$

където $\mathbf{x}$ е радиус - векторът на произволна точка в $\mathbb{E}^n$, $\Psi(\mathbf{x})$ е радиус - векторът на неговото изображение в $\mathbb{E}^n$, $\rho > 0$ е константа, $\mathbf{A}$ е фиксирана $n \times n$ ортогонална матрица с $det(\mathbf{A}) = 1$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ е вектор на транслация. Директната подобност (43) е евклидово движение, запазващо ориентацията, тогава и само тогава, когато $\rho = 1$. По този начин множеството от всички директни подобности в $\mathbb{E}^n$ образува също подгрупа на групата на афинните изображения, запазващи ориентацията и тази подгрупа е най-малкото разширение на групата на запазващите ориентацията евклидови движения.

Глава трета е организирана по следния начин. В 1 раздел са припомнени дефиниции и основни факти относно кривите на Френе и техните фокални криви в Евклидовите пространства $\mathbb{E}^3$ и $\mathbb{E}^4$. След това, е представена конструкция, в три стъпки, за определяне на параметризирана пространствена крива от дадена крива на Френе в $\mathbb{E}^3$, отнесена спрямо естествен параметър. Основната част от тази конструкция, т.е. получаването на крива на Френе в $\mathbb{E}^4$ от крива на Френе в $\mathbb{E}^3$ е подробно обсъдено. Конструкцията е придружена от алгоритъм, който обхваща всички случаи на крива на Френе в $\mathbb{E}^3$. В продължението са разгледани три илюстративни примера. Главата завършва със заключителни бележки. Има два важни класа криви на Френе в $\mathbf{E}^3$: класът на винтовите линии и неговото разширение класът на обобщените винтови линии. Всяка винтова линия има постоянна кривина и постоянна торзия и притежава параметризация относно естествен параметър във вида

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \big(p\cos(as), p\sin(as), bs\big)^T,$$

където $a \neq 0, b \neq 0, p \neq 0,\ a^2p^2 + b^2 = 1$ (виж [30, Глава 2]). Друга параметризация на произволна винтова линия, отнесена спрямо естествен параметър е

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \left(\sqrt{\frac{1-b^2}{a^2}}\cos(as), \sqrt{\frac{1-b^2}{a^2}}\sin(as), bs\right)^T, \tag{44}$$

където $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\},\ b \in \{(-1,0) \cup (0,1)\}$. За такава крива, кривината и торзията са съответно равни на

$$\kappa(s) = \sqrt{a^2\left(1-b^2\right)} \quad \text{и} \quad \tau(s) = ab. \tag{45}$$

Всяка обобщена винтова линия или крива с постоянен наклон е крива в $\mathbb{E}^3$, чиито допирателни вектори образуват постоянен ъгъл с

фиксиран единичен вектор. Този фиксиран вектор може да се избере да бъде вектор, успореден на оста z. Тогава най-често срещаната параметризация на обобщена винтова линия, отнесена спрямо естествен параметър, е

(46)
$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \big(x(s),\, y(s),\, bs\big)^T, \quad s \in I,$$
където $I \subseteq \mathbb{R}$ е интервал, $b \in \{(-1,0) \cup (0,1)\}$ е константа, и
$$\big(x'(s)\big)^2 + \big(y'(s)\big)^2 + b^2 = 1 \text{ за произволно } s \in I.$$

Крива на Френе в $\mathbf{E}^3$ е обобщена винтова линия тогава и само тогава, когато отношението на торзията към кривината е постоянно (виж леми 8.18 и 8.19 в учебника на Грей [26]). Очевидно всички винтови линии образуват подклас на класа на обобщените винтови линии. Връзките между равнинни криви и обобщените винтови линии са получени от Изумия и Такеучи в [27]. Параметричните представяния на обобщените винтови линии с даден постоянен ъгъл между допирателният вектор и фиксиран единичен вектор, и зададени функции на кривината са изследвани от Али в [3]. Няколко примера на обобщените винтови линии, отнесени спрямо естествен параметър, са дадени в [21]. По-подробно описание на диференциалната геометрия на пространствените криви може да бъде намерено в учебниците на Банчов [8] и Грей [26].

Приемаме, че четиримерното Евклидово пространство $\mathbb{E}^4$ е афинно пространство, чието асоциирано векторно пространство $\mathbb{R}^4$ се състои от реални вектор-стълбове с размерност 4×1. С други думи, всяка точка $X \in \mathbb{E}^4$ може да бъде отъждествена с нейния радиус-вектор $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$. Векторното пространство $\mathbb{R}^4$ е снабдено със стандартно скаларно произведение на два вектора. Ако $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ и $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ са четиримерни вектори, то скаларното произведение на $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ е реалното число

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4$$

и дължината на вектора $\mathbf{U}$ е

$$\|\mathbf{U}\| = \sqrt{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4}^2 .$$

Нека $\boldsymbol{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{E}^4$ е крива, отнесена спрямо естествен параметър, от клас C^4, дефинирана в интервала $I \subseteq \mathbb{R}$, с векторно-параметрично уравнение

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = \big(b_1(s),\, b_2(s),\, b_3(s), b_4(s)\big)^T, \quad s \in I. \tag{47}$$

Това означава, че координатните функции $b_i(s)$, $i = 1, 2, 3, 4$ имат непрекъснати производни до ред 4 включително и $\boldsymbol{\gamma}'(s) = \frac{d}{ds}\boldsymbol{\gamma}(s)$ е единичен вектор за произволно $s \in I$. Освен това, ако векторите $\boldsymbol{\gamma}'(s)$, $\boldsymbol{\gamma}''(s) = \frac{d}{ds}\boldsymbol{\gamma}'(s)$, $\boldsymbol{\gamma}'''(s) = \frac{d}{ds}\boldsymbol{\gamma}''(s)$ и $\boldsymbol{\gamma}^{(4)}(s) = \frac{d}{ds}\boldsymbol{\gamma}'''(s)$ са линейно независими за произволно $s \in I$, то кривата $\boldsymbol{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{E}^4$ се нарича крива на Френе, отнесена спрямо естествен параметър. Според Банчов и Ловет [8] придружаващия базис на Френе за кривата $\boldsymbol{\gamma}$ се състои от единичен допирателен вектор $\mathbf{T}(s)$, и съответно първи, втори и трети единични нормални вектори $\mathbf{N}_1(s)$, $\mathbf{N}_2(s)$ и $\mathbf{N}_3(s)$. Както е показано в учебника на Глюк [25], тези вектори могат да бъдат получени чрез метода за ортогонализация на Грам-Шмид, приложен към векторите $\boldsymbol{\gamma}'(s)$, $\boldsymbol{\gamma}''(s)$, $\boldsymbol{\gamma}'''(s)$ и $\boldsymbol{\gamma}^{(4)}(s)$. След това, кривините $K_1(s)$,$K_2(s)$ и $K_3(s)$ лесно могат да бъдат изчислени. В учебника си [8] Банчов и Ловет дават явни формули за кривините и предлагат друг рекурсивен начин за определяне на базиса на Френе. По-нататък използваме техния подход за изследване на кривите на Френе в $\mathbb{E}^4$.

Да отбележим, че условието $\boldsymbol{\gamma}$ да е крива на Френе в $\mathbb{E}^4$ е еквивалентно на условието $\boldsymbol{\gamma}$ да е крива от клас C^4 с кривини $K_1(s) > 0$, $K_2(s) > 0$ и $K_3(s) \neq 0$.

Аналогично на тримерния случай, съществува еднозначно определена оскулачна хиперсфера в произволна точка на кривата $\boldsymbol{\gamma}$ в $\mathbb{E}^4$. Центровете на тези оскулачни хиперсфери определят нова крива, наречена фокална крива на $\boldsymbol{\gamma}$. Урибе-Варгас [46] изследва фокалните криви за произволна размерност. От основен негов резултат следва, че кривата на Френе $\boldsymbol{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{E}^4$, отнесена спрямо естествен параметър, зададена с (47) притежава фокална крива с параметрично представяне

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \boldsymbol{\gamma}(s) + c_1(s)\mathbf{N}_1(s) + c_2(s)\mathbf{N}_2(s) + c_3(s)\mathbf{N}_3(s), \tag{48}$$

където $\mathbf{N}_i(s)$, $i = 1, 2, 3$ са трите единични нормални вектора на $\boldsymbol{\gamma}$ и коефициентите $c_i(s)$ $i = 1, 2, 3$ наречени фокални кривини могат да се изразят чрез кривините $K_1(s)$, $K_2(s)$, $K_3(s)$ на $\boldsymbol{\gamma}$. Ако $K_i(s)$ са

функции, различни от константа, то фокалните кривини са

$$
\begin{aligned}
c_1(s) &= \frac{1}{K_1(s)} \\
c_2(s) &= \left(\frac{1}{K_1(s)}\right)' \frac{1}{K_2(s)} \\
c_3(s) &= \left(\frac{c_1(s)}{c_2(s)} c_1'(s) + c_2'(s)\right) \frac{1}{K_3(s)} \\
&= \left(\frac{K_2(s)}{K_1(s)} + \left[\left(\frac{1}{K_1(s)}\right)' \frac{1}{K_2(s)}\right]'\right) \frac{1}{K_3(s)}.
\end{aligned} \tag{49}
$$

Урибе-Варгас [46] и Монтерде [36] доказват, че кривата $\boldsymbol{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{E}^4$ е сферична тогава и само тогава, когато

$$
(c_1(s))^2 + (c_2(s))^2 + (c_3(s))^2 \tag{50}
$$

е положителна константа за произволна стойност на s. Като следствие от уравнение (49), ако кривата $\boldsymbol{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{E}^4$ има постоянни кривини $K_i(s)$, $i = 1, 2, 3$, то нейните фокални кривини също са константни функции, определени както следва: $c_1(s) = \dfrac{1}{K_1(s)}$, $c_2(s) = 0$ и $c_3(s) = \dfrac{K_2(s)}{K_1(s)K_3(s)}$. Нещо повече, от (50) следва, че такава крива е сферична. В [30, глава 2] е показано, че произволна $4\boldsymbol{D}$ крива на Френе с постоянни кривини притежава параметризация относно естествен параметър от вида

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{\gamma}(s) = (p\cos(as), p\sin(as), q\cos(bs), q\sin(bs))^T, \\
\mathrm{p}, \mathrm{q} \neq 0, \quad \mathrm{a} \neq \mathrm{b} \neq 0, \quad \mathrm{a}^2\mathrm{p}^2 + \mathrm{b}^2\mathrm{q}^2 = 1.
\end{gathered} \tag{51}
$$

Нека $I \subseteq \mathbb{R}$ е интервал, съдържащ нулата и нека $\boldsymbol{\alpha} : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$ е крива на Френе от клас C^4 с параметрично представяне относно естествен параметър

$$
\boldsymbol{\alpha}(s) = \big(x(s),\, y(s),\, z(s)\big)^T, \quad s \in I. \tag{52}
$$

Сега можем да изследваме кривите в $\mathbb{E}^4$, отнесени спрямо естествен параметър, които са тясно свързани с $\boldsymbol{\alpha}$.

Теорема 3.2.1 *Нека* (52) *е параметричното представяне на кривата на Френе* $\boldsymbol{\alpha} : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$*, отнесена спрямо естествен параметър,*

от клас C^4, *и нека* $\kappa(s)$ *и* $\tau(s)$ *са кривината и торзията на* $\boldsymbol{\alpha}$. *Да предположим, че кривата* $\boldsymbol{\gamma}_1 : I \longrightarrow \mathbb{E}^4$ *е определена от*

(53)

$$\boldsymbol{\gamma}_1(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x(s) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}y(s) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}z(s) \\ \frac{s}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}(s) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{s}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad s \in I.$$

Тогава:

(а) $\boldsymbol{\gamma}_1$ *също е крива, отнесена спрямо естествен параметър.*

(б) $\boldsymbol{\gamma}_1$ *е крива на Френе в* $\mathbb{E}^4$ *с кривини*

(54)

$$K_1(s) = \frac{\kappa(s)}{\sqrt{2}},\ K_2(s) = \frac{\kappa(s)}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + 2\left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\right)^2}\ \text{и}\ K_3(s) = -\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\right)'}{1 + 2\left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\right)^2},$$

тогава и само тогава, когато $\boldsymbol{\alpha}$ *не е обобщена винтова линия, тоест,* $\left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\right)' \neq 0$ *за всяко* s.

Разгледани са и други начини за получаване на $4\boldsymbol{D}$ крива, отнесена спрямо естествен параметър, от крива на Френе в $\mathbb{E}^3$, отнесена спрямо естествен параметър.

Теорема 3.2.2 *Нека* $\boldsymbol{\alpha} : I \to \mathbb{E}^3$ *е крива на Френе, отнесена спрямо естествен параметър, от клас* C^4, *зададена с* (52). *Тогава кривата* $\boldsymbol{\gamma}_2 : I \to \mathbb{E}^4$, *зададена с*

$$\boldsymbol{\gamma}_2(s) = (x(s), y(s), \cos(z(s)), \sin(z(s)))^T, \quad s \in I \tag{55}$$

и кривата $\boldsymbol{\gamma}_3 : I \longrightarrow \mathbb{E}^4$, *зададена с*

(56)

$$\boldsymbol{\gamma}_3(s) = \left(x(s), y(s), 2\arctan(z(s)) - z(s), \ln\left(1 + (z(s))^2\right)\right)^T, \quad s \in I$$

са криви, отнесени спрямо естествен параметър, от клас C^4. *Освен това:*

(а) *За винтовата линия* $\boldsymbol{\alpha}$ *зададена с* (44) *с постоянни кривина и торзия* (45), *кривата* $\boldsymbol{\gamma}_2$ *е или сферична крива с постоянни ненулеви кривини, или е окръжност в двумерно афинно подпространство на* $\mathbb{E}^4$, *а кривата* $\boldsymbol{\gamma}_3$ *е крива на Френе в* $\mathbb{E}^4$ *с*

кривини

(57)

$$K_1(s) = \sqrt{\frac{(1-b^2)(ab^2s^2+a)^2+4b^4}{(b^2s^2+1)^2}} = \sqrt{(\kappa(s))^2 + \frac{4b^4}{(b^2s^2+1)^2}}$$
$$K_2(s) = \sqrt{\frac{(\kappa(s)\tau(s))^2 p(s)}{a^4(b^2s^2+1)^2((\kappa(s))^2(b^2s^2+1)^2)+4b^4}}$$
$$K_3(s) = \frac{2b^2\tau(s)(1-b^2)[a^4(b^2s^2+1)^3+2(\tau(s))^2(3b^4s^4-2b^2s^2-5)+24b^4]}{(K_1(s))^3(K_2(s))^2(b^2s^2+1)^4},$$

където $p(s) = 4(3b^2-2)(a\tau(s))^2(b^2s^2+1)^4 + (a^2\kappa(s))^2(b^2s^2+1)^6 + 16b^4(b^2(s^2-3)+1)(ab^2s^2+a)^2 + 64b^8$.

(b) *За произволна обобщена винтова линия* $\boldsymbol{\alpha}$ *от клас* C^4, *определена с* (46), *съответната крива* $\boldsymbol{\gamma}_2$, *дефинирана с* (55), *е крива на Френе в* $\mathbb{E}^4$ *тогава и само тогава, когато*

$$\Delta_2(s) = \det \begin{pmatrix} x'''(s)+b^2x'(s) & y'''(s)+b^2y'(s) \\ x^{(4)}(s)+b^2x''(s) & y^{(4)}(s)+b^2y''(s) \end{pmatrix} \tag{58}$$

е ненулева за произволна стойност на параметъра.

Следствие 3.2.3 *За винтовата линия* $\boldsymbol{\alpha}$ *зададена чрез* (44) *при* $a = b$, *кривата* $\boldsymbol{\gamma}_3$ *дефинирана с* (56) *е крива на Френе в* $\mathbb{E}^4$, *но кривата* $\boldsymbol{\gamma}_2$, *дефинирана с* (55), *не е крива на Френе в* $\mathbb{E}^4$.

В следващото твърдение е разгледан клас от обобщени винтови линии в $\mathbb{E}^3$, които не са кръгови спирали.

Твърдение 3.2.4 *Да предположим, че* $\boldsymbol{\alpha} : (-\infty, \infty) \longrightarrow \mathbb{E}^3$ *е крива на Френе, отнесена спрямо естествен параметър, параметризирана чрез*

(59)

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \left(\sqrt{\frac{1-b^2}{a^2}}(2\arctan(as) - as), \sqrt{\frac{1-b^2}{a^2}}\ln\left(1+(as)^2\right), bs\right)^T,$$

където a *и* b *са реални константи удовлетворяващи* $a \neq 0$, $b \in \{(-1,0) \cup (0,1)\}$. *Тогава* $\boldsymbol{\alpha}$ *е обобщена винтова линия с кривина и торзия, различни от константа. Освен това, чрез* (55), *кривата* $\boldsymbol{\alpha}$ *определя параметризирана крива*

(60)

$$\boldsymbol{\gamma}_2(s) = \left(\sqrt{\tfrac{1-b^2}{a^2}}(2\arctan(as) - as), \sqrt{\tfrac{1-b^2}{a^2}}\ln\left(1+(as)^2\right), \cos(bs), \sin(bs)\right)^T,$$
$s \in (-\infty, \infty)$,

която е крива на Френе в $\mathbb{E}^4$.

Следствие 3.2.5 *За обобщената винтова линия* $\boldsymbol{\alpha}$*, зададена чрез* (59) *при* $a = b$*, която не е кръгова спирала, кривата* $\boldsymbol{\gamma}_2$*, дефинирана с* (55)*, е крива на Френе в* $\mathbb{E}^4$*, но новата крива, дефинирана с* (56)

$$\boldsymbol{\gamma}_3(s) = \left(\sqrt{\tfrac{1-a^2}{a^2}}(2\arctan(as) - as), \sqrt{\tfrac{1-a^2}{a^2}} \ln\left(1 + (as)^2\right), \right.$$
$$\left. 2\arctan(as) - as, \ln(1 + (as)^2) \right)^T, \quad a \in \{(-1, 0) \cup (0, 1)\}$$

не е крива на Френе в $\mathbb{E}^4$*.*

С помощта на теореми 3.2.1 и 3.2.2 е дефинирана нова крива в $\mathbb{E}^3$, получена от дадена крива на Френе $\boldsymbol{\alpha} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ от клас C^4, отнесена спрямо естествен параметър. За целта е предложена конструкция, състояща се от три етапа:
- Първо, дадената крива $\boldsymbol{\alpha}$, отнесена спрямо естествен параметър, поражда единствена крива на Френе $\boldsymbol{\gamma}$ в $\mathbb{E}^4$, отнесена спрямо естествен параметър;
- Второ, получената крива $\boldsymbol{\gamma}$ определя единствена фокална крива $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\gamma}}$ в $\mathbb{E}^4$;
- Трето, ортогоналната проекция на тази фокална крива в хиперравнината $\Omega = \{x_4 = 0\} \subset \mathbb{E}^4$ определя новата крива в $\mathbb{E}^3$.

Първият етап, който представлява ключова новост за нашето предложение, се позовава на съществуването на кратък метод за получаването на четиримерна крива, отнесена спрямо естествен параметър, от тримерна крива, отнесена спрямо естествен параметър. Този кратък метод се реализира чрез комбиниране на теорема 3.2.1 и теорема 3.2.2. Следният алгоритъм дава пълно описание на нашата конструкция.

Алгоритъм 3.2.6 *Получаване на нова 3D крива, асоциирана с дадена 3D крива на Френе, отнесена спрямо естествен параметър, от клас* C^4*.*

Вход: *Кривата на Френе* $\boldsymbol{\alpha} : I \to \mathbb{E}^3$ *от клас* C^4*, отнесена спрямо естествен параметър, с параметрично представяне* (52)*.*

1. Изчислете кривината $\kappa(s)$ *и торзията* $\tau(s)$ *на* $\boldsymbol{\alpha}$*.*

2. Ако $\dfrac{\tau(s)}{\kappa(s)}$ *не е постоянна функция, тогава дефинирайте кривата* $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{E}^4$ *с параметрично представяне* (54)*, т.е.* $\boldsymbol{\gamma}(s) = \boldsymbol{\gamma}_1(s)$*, и отидете на стъпка 5, в противен случай отидете на стъпка 3.*

3. Ако $\dfrac{\tau(s)}{\kappa(s)}$ *е постоянна функция, но* $\kappa(s)$ *и* $\tau(s)$ *не са постоянни*

функции, тогава определете кривата $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{E}^4$ *с параметризация* (55), *т.е.* $\boldsymbol{\gamma}(s) = \boldsymbol{\gamma}_2(s)$, *и отидете на стъпка 5, в противен случай* $\boldsymbol{\alpha}$ *е кръгова спирала, т.е. както* $\kappa(s)$, *така и* $\tau(s)$ *са постоянни функции и след това преминете към следващата стъпка.*
4. Определете кривата $\boldsymbol{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{E}^4$ *чрез параметричното уравнение* (56), *т.е.* $\boldsymbol{\gamma}(s) = \boldsymbol{\gamma}_3(s)$, *и отидете на стъпка 5.*
5. Намерете фокалната крива $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\gamma}}$ *на кривата на Френе* $\boldsymbol{\gamma}$, *отнесена спрямо естествен параметър.*
6. Определете ортогоналната проекция $\boldsymbol{\beta}$ *на кривата* $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\gamma}}$ *върху хиперравнината*
$\Omega = \{x_4 = 0\} \subset \mathbb{E}^4$.
7. Отъждествете Ω *с Евклидовото пространство* $\mathbb{E}^3$ *и разгледайте кривата* $\boldsymbol{\beta}$ *като крива* $\boldsymbol{\beta} : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$.
***Изход**: 3D крива* $\boldsymbol{\beta}$.

Определение 3.2.7 Кривата $\boldsymbol{\beta}$ от алгоритъм се нарича ***обобщена фокална крива*** на 3D кривата $\boldsymbol{\alpha}$, отнесена спрямо естествен параметър.

Описания по-горе алгоритъм 3.2.6 разделя множеството от всички криви на Френе в $\mathbb{E}^3$, отнесени спрямо естествен параметър, в три непресичащи се класа: класът на неспиралните криви, т.е. криви за които отношението на торзия към кривина е различно от константа; класът на обобщените спирали с непостоянни кривина и торзия; класът на кръговите спирали. Теоремите 3.2.1 и 3.2.6 гарантират съществуването на единствена обобщена фокална крива за всяка неспирална крива на Френе и всяка кръгова спирала. Твърдение 3.2.4 и алгоритъм 3.2.6 показват, че всяка обобщена винтова линия (59) също определя единствена обобщена фокална крива.

В последния раздел на глава 3, са разгледани три илюстративни примера за обобщени фокални криви на $3D$ криви с известна параметризация относно естествен параметър. Стандартен подход за получаването на параметрично представяне относно дължината на дъгата на параметризирана крива е представен от Ту [45, глава 1, стр.10]. По-нататък, индексът i на кривата $\boldsymbol{\alpha}_i : I \to \mathbb{E}^3$ се появява като първи индекс на всички скаларни и векторни функции, свързани с $\boldsymbol{\alpha}_i$.

Първият разгледан пример е на обобщена фокална крива на 3D крива с непостоянно отношение на торзия към кривина. Изследваната кривата в $\mathbb{E}^3$, отнесена спрямо естествен параметър, е с пара-

метрично уравнение
(61)

$$\boldsymbol{\alpha}_1(s) = \left(\frac{1}{3}(s+2)^{3/2}, -\frac{(1-s)^{3/2}}{3\sqrt{2}}, -\frac{(3-s)^{3/2}}{3\sqrt{2}}\right)^T, \quad s \in [-2,1].$$

От теорема 3.2.1 е получено, че 4D кривата $\boldsymbol{\gamma}_1$, отнесена спрямо естествен параметър, има векторно параметрично уравнение

$$\boldsymbol{\gamma}_1(s) = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}(s+2)^{3/2}, -\frac{1}{6}(1-s)^{3/2}, -\frac{1}{6}(3-s)^{3/2}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^T, s \in (-2,1)$$

Съгласно алгоритъм 3.2.6 и определение 3.2.7 проекцията на $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\gamma_1}}$ върху хиперравнината Ω се отъждествява с обобщената фокална крива $\boldsymbol{\beta}_1 : (-2,1) \longrightarrow \mathbb{E}^3$ на $\boldsymbol{\alpha}_1$. След като са направени някои изчисления е получена параметризацията на $\boldsymbol{\beta}_1$:

$$\boldsymbol{\beta}_1(s) = \begin{pmatrix} \frac{14\sqrt{2}}{45}(s+2)^{5/2} \\ \frac{14}{9}(1-s)^{5/2} \\ -\frac{14}{15}(3-s)^{5/2} \end{pmatrix}, \quad s \in (-2,1).$$

Кривата $\boldsymbol{\alpha}_1$ с ирационална параметризация (61), нейната фокална крива $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\alpha_1}}$ и нейната обобщена фокална крива $\boldsymbol{\beta}_1$ са напълно изобразени на фиг 3.1. Сравнявайки фокалната крива на $\boldsymbol{\alpha}_1$ и обобщената фокална крива на $\boldsymbol{\alpha}_1$ е заключено, че както $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\alpha_1}}$, така и $\boldsymbol{\beta}_1$ са пространствени криви с ирационални параметризации .

Вторият разгледан пример е на обобщена фокална крива на 3D спирална крива, чиито кривина и торзия са различни от константа. Разгледана е пространствената крива, отнесена спрямо естествен параметър, и ирационална параметризация

$$\boldsymbol{\alpha}_2(s) = \left(\frac{1}{3}(1+s)^{3/2}, -\frac{1}{3}(1-s)^{3/2}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^T, \quad s \in (-1,1). \tag{62}$$

Кривината и торзията на $\boldsymbol{\alpha}_2$ са съответно $\kappa_2(s) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2-2s^2}}$ и $\tau_2(s) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2-2s^2}}$. Следователно кривата $\boldsymbol{\alpha}_2$ е обобщена винтова линия с постоянно отношение $\frac{\tau_2(s)}{\kappa_2(s)} = -1$, която е различна от винтова линия. Прилагайки описания алгоритъм към $\boldsymbol{\alpha}_2$ е определена кривата $\boldsymbol{\gamma}_2 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{E}^4$, отнесена към естествен параметър, зададена с

$$\boldsymbol{\gamma}_2(s) = \left(\frac{1}{3}(1+s)^{3/2}, -\frac{1}{3}(1-s)^{3/2}, \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)^T,$$

и са изчислени нейните скаларни и векторни инварианти. След това чрез стъпки 5, 6 и 7 от алгоритъма, е получена параметризацията на обобщената фокална крива $\boldsymbol{\beta}_2 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{E}^3$ на $\boldsymbol{\alpha}_2$. Допирателният вектор към тази крива има координатни функции, които се нулират за $s = 0$ и следователно кривата $\boldsymbol{\beta}_2$ има връх в точката $\boldsymbol{\beta}_2(0)$. Обобщената винтова линия $\boldsymbol{\alpha}_2$ и нейната обобщена фокална крива $\boldsymbol{\beta}_2$ са изобразени на фиг 3.2.

Началната крива $\boldsymbol{\alpha}_2$ принадлежи на множеството от обобщени спирали с ирационални параметризации относно дължината на дъгата

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(s) = \begin{pmatrix} \frac{\left(2\sqrt{1-b^2}\right)(as+p)^{3/2}}{3a\sqrt{p+q}} \\ -\frac{\left(2\sqrt{1-b^2}\right)(q-as)^{3/2}}{3a\sqrt{p+q}} \\ bs \end{pmatrix}, \quad s \in \left(-\frac{p}{a}, \frac{q}{a}\right), \tag{63}$$

където a, b, p, q са реални константи удовлетворяващи $a > 0$, $p > 0$, $q > 0$, $b \in \{(-1,0) \cup (0,1)\}$. Всъщност тъй като кривината на $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$

$$\tilde{\kappa}(s) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2\left(1-b^2\right)}{(as+p)(q-as)}}$$

и торзията на $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$

$$\tilde{\tau}(s) = -\frac{ab}{2\sqrt{(as+p)(q-as)}},$$

са непостоянни функции, но отношението им $\dfrac{\tilde{\tau}(s)}{\tilde{\kappa}(s)} = -\dfrac{b}{\sqrt{1-b^2}}$ е постоянна функция, то с други думи, всяка крива с параметрично представяне (63) е обобщена спирала, различна от кръгова спирала. Очевидно е, че за $a = 1$, $p = 1$, $q = 1$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(s) = \boldsymbol{\alpha}_2(s)$.

Твърдение 3.3.1 *Обобщената фокална крива на всяка обобщена спирала в* $\mathbb{E}^3$ *с параметризация относно дължината на дъгата* (63) *е еднозначно определена.*

Третият разгледан пример е на обобщена фокална крива към винтова линия, отнесена спрямо естествен параметър, и параметризация

$$\boldsymbol{\alpha}_3(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(s), \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(s), \frac{1}{\sqrt{2}}s\right)^T, \quad s \in (-\infty, +\infty). \tag{64}$$

Посредством теорема 3.2.2 е получена кривата на Френе в $\mathbb{E}^4$, отнесена спрямо естествен параметър

$$\boldsymbol{\gamma}_3(s) = \left(\frac{\cos(s)}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(s)}{\sqrt{2}}, 2\arctan\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - \frac{s}{\sqrt{2}}, \log\left(\frac{s^2}{2}+1\right)\right)^T, \; s \in \mathbb{R}.$$

Намерени са диференциално геометричните инварианти на тази крива и чрез стъпки от 5. до 7. от алгоритъм 3.2.6 е получен параметричния вид на обобщената фокална крива $\boldsymbol{\beta}_3 : (-\infty, +\infty) \longrightarrow \mathbb{E}^3$ на $\boldsymbol{\alpha}_3$. Последната крива има съответно кривина и торзия равни на

$$\kappa_{\beta 3} = \frac{\left(s^2+2\right)^2\left(s^6+12s^4+4s^2+16\right)^3\sqrt{s^6+6s^4+4s^2+8}}{\sqrt{2s^2}(s^{10}+22s^8+72s^6+320s^4+528s^2+416)(s^{10}+13s^8+32s^6-72s^4+48s^2+16)^{3/2}}$$

$$\tau_{\beta 3} = -\frac{\left(s^2+2\right)^2\left(s^6+12s^4+4s^2+16\right)^2}{\sqrt{2}(s^6+6s^4+4s^2+8)(s^{10}+22s^8+72s^6+320s^4+528s^2+416)}.$$

Освен това $\boldsymbol{\beta}_3$ има връх в точката $\boldsymbol{\beta}_3(0)$, тъй като допирателният вектор на $\boldsymbol{\beta}_3$ се нулира при $s = 0$. Взаимното разположение на $\boldsymbol{\alpha}_3$ и $\boldsymbol{\beta}_3$ е показано на фиг. 3.3.

Резултатите от тази глава са публикувани в Резултатите от тази глава са публикувани в [22] *Generalized Focal Curves of Frenet Curves in Three-Dimensional Euclidean Space*, Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 16 (2020), pp. 891-913. Определянето на обобщени фокални криви на други видове неспирални криви и обобщени спирали ще бъдат обект на бъдещи изследвания. Класът на сферичните криви е описан от Георгиев в [19].

Публикации, включени в дисертацията

1. [2] Г. Х. Георгиев, Цв. Л. Динкова и Р. П. Енчева, Фокални криви в Евклидово пространство, Сборник научни трудове, MATTEX 2014, том 1, стр. 67-75, Университетско издателство "Епископ Константин Преславски".

2. [21] G. H. Georgiev and C. L. Dinkova, Focal curves of geodesics on generalized cylinders, ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences, 14 (2019), pp. 2058–2068.

3. [22] G. H. Georgiev and C. L. Dinkova, Generalized Focal Curves of Frenet Curves in Three-Dimensional Euclidean Space, Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 16 (2020), pp. 891–913.

4. [23] G. H. Georgiev, R. P. Encheva, and C. L. Dinkova, Geometry of cylindrical curves over plane curves, Applied Mathematical Sciences, 113 (2015), pp. 5673–5649.

5. [24] G. H. Georgiev, R. P. Encheva, and C. L. Dinkova, A visualization and a shape characterisation of a class of cylindrical helices, MATTEX 18, Proceedings of the international conference, 1 (2018), pp. 57–64.

Апробация на резултатите

Резултатите, които са включени в настоящата дисертация, са получени в съавторство:

- Г. Георгиев и Р. Енчева [2], [23], [24];
- Г. Георгиев [21] и [22].

Публикувани са в научно списание:

- Applied Mathematical Sciences: [23] (SJR-0.35(2015))
- ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences [21](SJR-0.238(2019))
- Global Journal of Pure and Applied Mathematics [22]

и в рецензирани сборници от конференции: [2], [24].

Резултатите от дисертационния труд са докладвани на:

- MATTEX 2014 , Шумен, 2014 г. [2]
- MATTEX 2018 , Шумен, 2018 г. [24]
- Докторантски семинар, катедра "Алгебра и геометрия"13.03.2018 г.

Авторска справка

По мнение на автора, основните приноси на дисертационния труд са: В глава 1, са изследвани нов тип цилиндрични криви, получени директно от равнинни криви. Първите две координатни функции на такава цилиндрична крива съвпадат с координатните функции на равнинната крива. Третата координатна функция на тази пространствена крива е или параметъра t на кривата, или подходяща негова функция. Класът на така получените цилиндрични криви съдържа в себе си класа на обобщените винтови линии. Изследвани са връзките между диференциално-геометричните инварианти на равнинната крива и диференциално-геометричните инварианти на съответната ѝ цилиндрична крива. Нещо повече, получено е и параметричното представяне на фокалните криви на тези цилиндрични криви.

В глава 2 са изследвани диференциално геометричните инварианти на неравнинни, геодезични линии върху обобщени цилиндри. Първо, предложена е конструкция, която свързва дадена равнинна линия с единична скорост, с еднозначно определена правилна пространствена крива. За целта, е разгледана нова равнинна крива с постоянна скорост $\frac{1}{\sqrt{2}}$ такава, че множествата от точките на равнинната крива с единичната скорост и новата равнинна крива да съвпадат. Както параметричните представяния, така и знаковите кривини на равнинните линии са тясно свързани. Второ, еднозначно е определена неравнинна геодезична линия с единична скорост върху правия обобщен цилиндър над разглежданата равнинна крива с постоянна скорост $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Трето, изследвана е фокалната линия на получената геодезична линия, която също е неравнинна линия. Кривината и торзията на геодезичната линия и нейната фокална линия са изразени чрез равнинната кривина на горе споменатата равнинна линия с постоянна скорост $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Освен това е показано, че отношението на торзията и кривината на разглежданите пространствени линии, геодезична и нейната фокална, е равно на $+1$ или на -1. И двете възможности са илюстрирани с подходящи примери.

В глава 3, е представен триетапен алгоритъм за получаването на нова асоциирана крива в $\mathbb{E}^3$ с всяка 3D крива на Френе от клас C^4 в $\mathbb{E}^3$. Новата крива се нарича обобщена фокална крива на кривата на Френе в $\mathbb{E}^3$. В първия етап от предложения алгоритъм, по дадена крива на Френе в $\mathbb{E}^3$, е дефинирана крива на Френе в $\mathbb{E}^4$. Във втория

етап от алгоритъма е намерена единствена 4D фокална крива на разглежданата крива на Френе в $\mathbb{E}^4$, отнесена към естествен параметър. В последния трети етап е определена обобщената фокална крива на базисната крива в $\mathbb{E}^3$ като проекция на получената 4D фокална крива върху Евклидовото пространство $\mathbb{E}^3$. Чрез доказване на теореми 3.2.1 и 3.2.2 и чрез представяне на алгоритъм за определяне на обобщена фокална крива е показано, че всички криви на Френе от клас C^4 в $\mathbb{E}^3$ може естествено да се разделят на три отделни групи: криви, чието отношение на торзия към кривина е различно от константа; криви с постоянно отношение на торзия към кривина, но с кривина и торзия, различни от константа; криви с постоянна кривина и постоянна торзия. Алгоритъмът за получаване на обобщена фокална крива е илюстриран с три примера: неспирална крива; обобщена винтова линия, която не е кръгова спирала; винтова линия. Определянето на обобщени фокални криви на други видове неспирални криви и обобщени спирали ще бъдат обект на бъдещи изследвания.

Литература

[1] Г. Станилов, *Диференциална геометрия*, Тилия, София, 1997.

[2] Г. Х. Георгиев, Цв. Л. Динкова и Р. П. Енчева, *Фокални криви в Евклидово пространство*, MATTEX 14, Сборник научни трудове, 1 (2014), стр. 67–75.

[3] A. T. Ali, *Position vector of general helices in Euclidean 3-space*, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 3 (2011), pp. 1–8.

[4] N. M. Althibany, *Designing Generalized Cylinder with Characteristic Base Curve in Euclidean 3-space*, Turk. J. Math. Comput. Sci., 1 (2022), pp. 82–90.

[5] ——, *Generalized Cylinder with Geodesic and Line of Curvature Parameterizations*, Fundamental Journal of Mathematics and Applications, 2 (2022), pp. 106–113.

[6] M. Alvarez and J. M. Gutiérrez, *A Simple Proof of the Lagrange Identity on Vector Products*, The Mathematical Gazette, 83 (1999), p. 509.

[7] J. Arroyo, O. J. Garay, and J. J. Menca, *When is a peroidic function the curvature of a closed plane curve?*, The American Mathematical Monthly, 115 (2008), pp. 405–414.

[8] T. F. Banchoff and S. T. Lovett, *Differential Geometry of Curves and Surfaces, 2nd ed*, CRC/Taylor and Francis Group: Boca Raton, FL, USA, 2016.

[9] M. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Dover Publications, 2016.

[10] L. M. Camposm, *Generalized Calculus with Applications to Matter and Forces*, CRC Press/ Taylor and Francis Group, Boca Raton, FL, 2014.

[11] Y. Chen, J. Ding, and Y. Lv, *Geometric constraints and interference-proof conditions of helix-curve meshing-wheel mechanism*, Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, 39 (2015), pp. 13–18.

[12] J. H. Choi and Y. H. Kim, *Associated curves of a Frenet curve and their applications*, Applied Mathematics and Computation, 218 (2012), pp. 9116–9124.

[13] B. Şahiner, *Direction curves of tangent indicatrix of a curve*, Applied Mathematics and Computation, 343 (2019), pp. 273–284.

[14] S. Deshmukh, A. Alghanemi, and R. T. Farouki, *Space curves defined by curvature-torsion relations and associated helices*, Filomat, 33 (2019), pp. 4951–4966.

[15] S. Deshmukh, C. B.-Y., and A. A., *Natural Mates of Frenet Curves in Euclidean 3-Space*, Turkish Journal of Mathematics, 24 (2018), pp. 2826–2840.

[16] R. P. Encheva and G. H. Georgiev, *Curves on the shape spere*, Results in Mathematics, 44 (2003), pp. 279–288.

[17] R. P. Encheva and G. H. Georgiev, *Shapes of space curves*, Journal for Geometry and Graphics, 7 (2003), pp. 145–155.

[18] ———, *Similar Frenet Curves*, Results in Mathematics, 55 (2009), pp. 359–372.

[19] G. H. Georgiev, AIP Conference Proceedings, 2505.

[20] ———, *Geometric Transformations for Modeling of Curves and Surfaces*, Shaker Verlag, Aachen, 2012.

[21] G. H. Georgiev and C. L. Dinkova, *Focal curves of geodesics on generalized cylinders*, ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences, 14 (2019), pp. 2058–2068.

[22] ———, *Generalized Focal Curves of Frenet Curves in Three-Dimensional Euclidean Space*, Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 16 (2020), pp. 891–913.

[23] G. H. Georgiev, R. P. Encheva, and C. L. Dinkova, *Geometry of cylindrical curves over plane curves*, Applied Mathematical Sciences, 113 (2015), pp. 5673–5649.

[24] G. H. Georgiev, R. P. Encheva, and C. L. Dinkova, *A visualization and a shape characterisation of a class of cylindrical helices*, MATTEX 18, Proceedings of the international conference, 1 (2018), pp. 57–64.

[25] H. Gluck, *Higher curvatures of curves in Euclidean space*, The American Mathematical Monthly, 73 (1966), pp. 699–704.

[26] A. Gray, E. Abbena, and S. Salamon, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, Studies in Advanced Mathematics. Chapman Hall/CRC. Boca Raton FL, 2006.

[27] S. Izumiya and N. Takeuchi, *Generic properties of helices and Bertrand curves*, Journal of Geometry, 74 (2002), pp. 97–109.

[28] ———, *Special curves and ruled surfaces*, Cotributions to Algebra and Geometry, 44 (2003), pp. 203–212.

[29] ——, *New Special Curves and Developable Surfaces*, Turkish Journal of Mathematics, 28 (2004), pp. 153–163.

[30] W. Kuhnel, *Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds, 3rd ed.*, American Mathematical Society: Providence, RI, USA, 2015.

[31] W. J. Lewis, *Mathematical model of a moment-less arch*, Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 472 (1998), pp. 1–14.

[32] S. Liu, Y. Xia, and L. Liang, *A modified logarithmic spiral method for determining passive earth pressure*, Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 10 (2018), pp. 1171–1182.

[33] Y. Liu, C. Hung, and Y. Chang, *Study on involute of circle with variable radii in a scroll compressor*, Mechanism and Machine Theory, 45 (2010), pp. 1520–1536.

[34] Y. Liu, Y. Tang, and Y. Yang, *Optimum design of scroll profiles created from involute of circle with variable radii by using finite element analysis*, Mechanism and Machine Theory, 55 (2012), pp. 1–17.

[35] N. Macit and M. Duldul, *Some new associated curves of a frenet curve in e3 and e4*, Turkish Journal of Mathematics, 38 (2014), pp. 1023–1037.

[36] J. Monterde, *Curves with constant curvature ratios*, Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana, 3a Serie, 13 (2007), pp. 177–186.

[37] M. Onder, *Construction of Curve Pairs and Their Applications*, The Proceedings of the National Academy of Sciences, India, Section A: Physical Sciences, (2019).

[38] R. Osserman, *How the Gateway Arch Got its Shape*, Nexus Network Journal, 12 (2010), pp. 167–189.

[39] G. Ozturk and K. Arslan, *On focal curves in Euclidean n-space* $\mathbb{R}^n$, Novi Sad Journal of Mathematics, 46 (2010), pp. 35–44.

[40] G. Ozturk, B. Bulca, B. Bayram, and K. Arslan, *Focal representation of k-slant Helices in Em+1*, Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica, 7 (2015), pp. 200–209.

[41] S. P. Radzevich, *Theory of Gearing: Kinematics, Geometry, and Synthesis*, CRC Press. Boca Raton FL, 2018.

[42] T. Scherr, C. Quitadamo, P. Tesvich, D. S. W. Park, T. Tiersch, D. Hayes, J.-W. Choi, k. Nandakumar, and W. T. Monroe, *A planar microfluidic mixer based on logarithmic spirals*, Journal of Micromechanics and Microengineering, 22 (2012), pp. 1–21.

[43] J. R. Silvester, *Determinants of block matrices*, The Mathematical Gazette, 84 (2000), pp. 460–467.

[44] R. Tan, B. Chen, C. Peng, and X. Li, *Study on spatial curve meshing and its application for logarithmic spiral bevel gears*, Mechanism and

Machine Theory, 86 (2015), pp. 172–190.

[45] L. W. Tu, *Differential Geometry, Connections, Curvature, and Characteristic Classes*, Springer International Publishing AG. Cham, Switzerland, 2017.

[46] R. Uribe-Vargas, *On Vertices, focal curvatures and differential geometry of space curves*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, 36 (2005), pp. 285–307.

[47] X. Xu, X. Zhang, and Y. Zheng, *Logarithmic Spiral and its Application to the Design of the Relieving Shaped Milling Cutter*, Applied Mechanics and Materials, 42 (2011), pp. 396–399.

[48] Y. Zhou, S. Fang, H. Liu, and S. Fu, *A liquid metal conical helical antenna for circular polarization-reconfigurable antenna*, International Journal of Antennas and Propagation, 2016 (2016), pp. 1–7.

Благодарности

Бих искала да изразя своята благодарност и признателност към моя научен ръководител проф. д.н. Георги Георгиев и доц. д-р Радостина Енчева за подкрепата, оказаната помощ, интерес и внимание към моята работа.

Благодарна съм и на колегите ми от катедра "Алгебра и геометрия", към Факултета по математика и информатика на Шуменския университет, за тяхната подкрепа и отзивчивост.

Искам да благодаря и на семейството си за търпението и подкрепата им.