Случайни процеси

Павлина Йорданова
pavlina_kj@abv.bg

ШУ "Епископ Константин Преславски", България.

Съдържание:

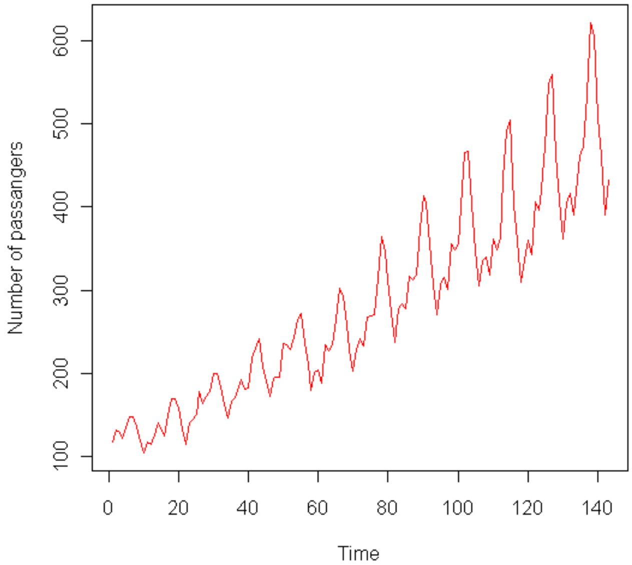
Литература:

1. Маруся Божкова, Записки по случайни процеси, 2010.
2. Боян Димитров, Вериги на Марков, Наука и изкуство, 1974.
3. Йордан Стоянов, Стохастични процеси, Наука и изкуство, 1978.
4. Sidney Resnick, Adventures in Stochastic Processes, 1992.

1. Случайни процеси и техните характеристики.

1.1 Въведение, дефиниция и примери.

Защо е полезно изследването на случайни процеси?



- Явленията или популациите, които бихме искали да изследваме обикновено съдържат някаква случайна компонента и се изменят във времето или в пространството. Когато искаме да предскажем тяхното поведение, вземайки в предвид случайните ефекти, ние се нуждаем от теорията на случайните процеси.

Тези данни представляват броят авио-пътници в хиляди между 1949 и 1960 г. Виж AirPassengers {datasets} на софтуера R.

- Случайният или стохастичен процес е случаен елемент, чиято траектория е определена като резултат от експеримент.

По-нататък ще разглеждаме вероятностно пространство

$$\mathcal{S} = (\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{A}_t\}_{t\in T}, \mathbb{P}),$$

с филтрация (непрек. отдясно). Тук $T \subset \mathbb{R}$, $T \neq \emptyset$ е множество от моменти от време.

Дефиниция 1.1.1 Семейството от случайни елементи $\{\xi(t,\cdot)\}_{t\in T}$, дефинирано върху $\mathcal{S}$ и такова, че за всяко фиксирано $t \in T$, $\xi(t,\cdot)$ е случайна величина в $\mathcal{A}_t$, се нарича случаен процес.

Дефиниция 1.1.2 Множеството X от всички възможни стойности на $\{\xi(t,\cdot)\}_{t\in T}$, заедно със съответната Борелева σ-алгебра $\mathcal{X}$, се нарича фазово пространство или пространство от състоянията на ξ.

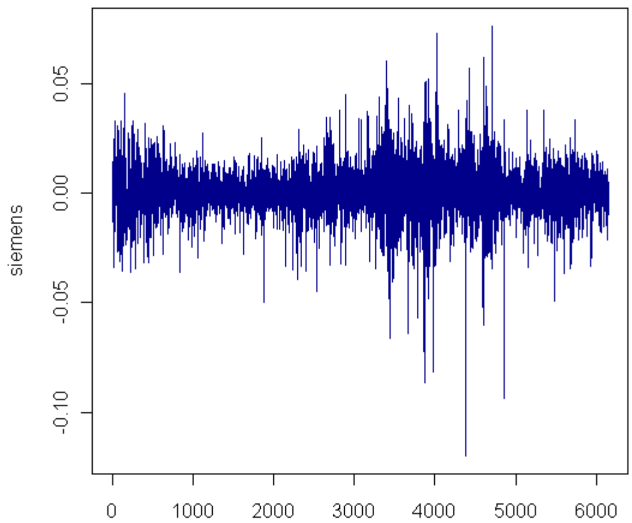
Дефиниция 1.1.3 За фиксирано $\omega \in \Omega$, $\xi(t,\omega) : T \to \mathbb{R}$ се нарича траектория или реализация на ξ съответстваща на ω.

Забележка: 1. Ако T е интервал, тогава ξ е случаен процес с непрекъснато време.
2. Ако T е дискретно множество, тогава ξ е случайна редица или случаен процес с дискретно време.

Елементите на T обикновено се интерпретират като моменти или периоди от време, тогава ξ се нарича още времеви ред(time series). Т.е. от емпирична гледна точка времевият ред е съвкупност от наблюдения, направени последователно във времето.

Примери и приложения:

- Тези данни съдържат дневната логаритмична възвръщаемост



на акциите на Siemens от 02.01. 1973 г. до 23.01.1996г. Виж (46).

- Брой на клиентите, които влизат в съседния магазин за един ден.
- Горната граница на вашето кръвно налягане.
- Броят на исковете, които постъпват в застрах. компания.
- Количеството паднали валежи на ден в даден регион.

Нека ξ и η са два случайни процеса, дефинирани върху едно и също вероятностно пространство $\mathcal{S}$ и с едно и също множество T.

Дефиниция 1.1.4 Процесите ξ и η са стохастично еквивалентни ако за всяко $t \in T$ случайните величини $\xi(t)$ и $\eta(t)$ почти сигурно съвпадат, т.е. за всяко $t \in T$

$$P(\omega : \xi(t,\omega) = \eta(t,\omega)) = 1.$$

В този случай казваме, че ξ е модификация на η и обратно.

Дефиниция 1.1.5 Процесите ξ и η са неразличими ако

$$P(\omega : \xi(t,\omega) = \eta(t,\omega), \forall t \in T) = 1.$$

Това означава, че техните траектории п.с. съвпадат.

Пример 1.1.6 Нека $T = [0,1]$ и $\nu \sim U(0,1)$. Разглеждаме случайните процеси $\xi(t,\omega) = 0$, за всяко $t \in T$ и $\omega \in \Omega$ и

$$\eta(t,\omega) = \begin{cases} 0 & , \ t \neq \nu \\ 1 & , \ t = \nu \end{cases}$$

Тогава ξ и η са стохастично еквивалентни,

$$P(\omega : \xi(t,\omega) \neq \eta(t,\omega)) = P(\omega : \nu(\omega) = t) = 0$$

но те нямат общи траектории.

Дефиниция 1.1.6 Стохастичният процес ξ се нарича сепарабелен, ако съществува някакво изброимо множество $\mathcal{J}$ от точки, които са плътни в T и такива, че процесът $\{\xi(t,\cdot)\}_{t\in\mathcal{J}}$ определя целия процес върху T.

Твърде естествен е въпросът как можем да зададем един случаен процес?

Дефиниция 1.1.7 Нека $n \in \mathbb{N}$ и $t_1, t_2, ..., t_n \in T$. Съвместните функции на разпределение

$$F_{\xi(t_1),\xi(t_2),...,\xi(t_n)}(x_1, x_2, ..., x_n) = P(\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2, ..., \xi(t_n) < x_n)$$

се наричат крайно мерни разпределения на ξ.

Теорема за съществуване на Колмогоров 1.1.7

Нека

$$\{F_{\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n)}(x_1,\ldots,x_n) : n \in \mathbb{N}, t_k \in T, k = 1,2,\ldots,n\}$$

е семейство от крайно мерни разпределения, удовлетворяващи следните условия за съгласуваност:

1. $$F_{\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n),\xi(t_{n+1}),\ldots,\xi(t_{n+m})}(x_1,\ldots,x_n,\infty,\ldots,\infty) = F_{\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n)}(x_1,\ldots,x_n);$$

2. $F_{\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n)}(x_1,\ldots,x_n) = F_{\xi(t_{k_1}),\ldots,\xi(t_{k_n})}(x_{k_1},\ldots,x_{k_n})$,
   за всяка пермутация $k_1,\ldots,k_n$ на числата $1,2,\ldots,n$.

Тогава съществува вероятностно пространство и случаен процес, дефиниран в него, който има тези крайномерни разпределения.

Забележка:

1. Ако два случайни процеса са неразличими, тогава те са стохастично еквивалентни и техните крайно мерни разпределения съвпадат. В общия случай обратното не е вярно.

2. Joseph Doob доказва, че за всеки случаен процес съществува стохастично еквивалентна сепарабелна модификация. Ето защо нататък ще предполагаме, че дискутираните случайни процеси са сепарабелни.

3. Когато всички крайномерни разпределения на два процеса съвпадат казваме още, че те съвпадат по закон или по разпределение.

Ако един случаен процес е сепарабелен, тогава той е определен от своите крайномерни разпределения.

Всяка характеристика, която определя крайно мерните разпределения определя процеса.

Пример 1.1.8

1. Н.е.р. процес $\{\varepsilon(t,\cdot)\}_{t\in T}$, където $\varepsilon(t,\cdot)$ са н.е.р. с дадена ф.р. Накратко $\varepsilon \sim IID(E\varepsilon, D\varepsilon)$.

2. Гаусовият процес е процес с нормални крайномерни разпределения.

Друг начин да дефинираме един процес е посредством неговото явно аналитично задаване.

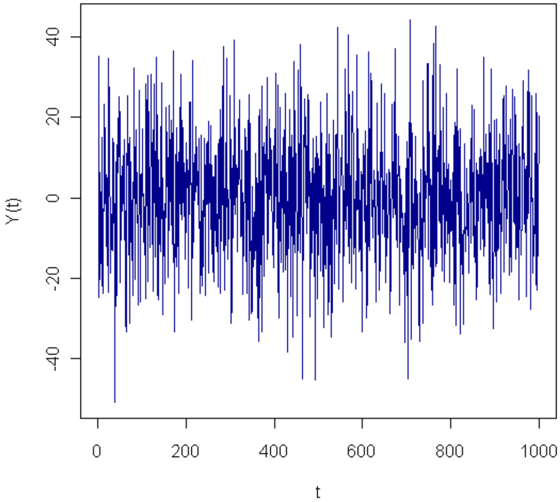
Премери 1.1.9

1. IID процес
$$Y(t) = \varepsilon(t), \quad t \in T,$$
където $\varepsilon(t) \sim IID(E\varepsilon, D\varepsilon)$, с дадено разпределение.

2. Бял шум

$$Y(t) = \varepsilon(t), \quad t \in T, \tag{1}$$

където ε са некорелирани, с дадено разпределение, с $EY(t) = 0$ и дисперсия $\sigma_\varepsilon^2 < \infty$.



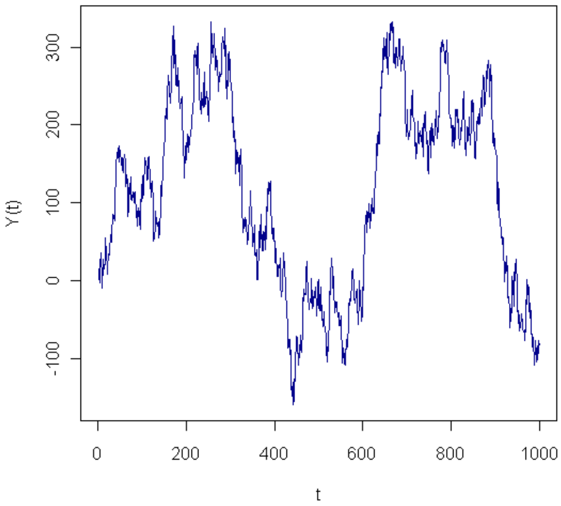
Накратко $Y \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Виж (36).

3. Случайно блуждаене със средно нула

$$Y(t) = Y(t-1) + \varepsilon(t), \quad t \in T, \tag{2}$$

където $\varepsilon \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

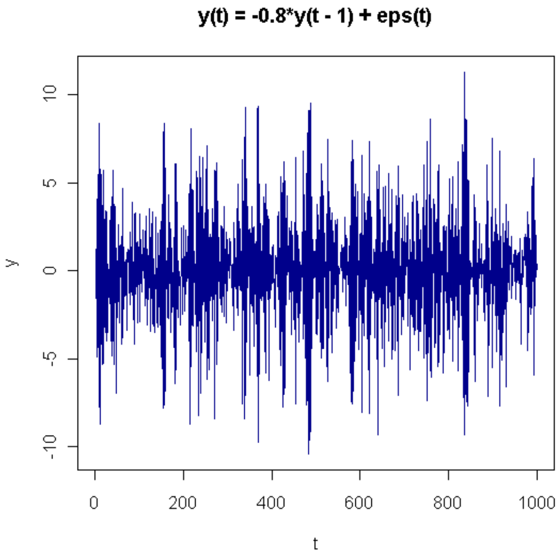


Виж (37).

4. AR(1) процес

$$Y(t) = \phi . Y(t-1) + \varepsilon(t), \quad t \in T, \tag{3}$$

където ϕ е реална константа и $\varepsilon \sim WN(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$.

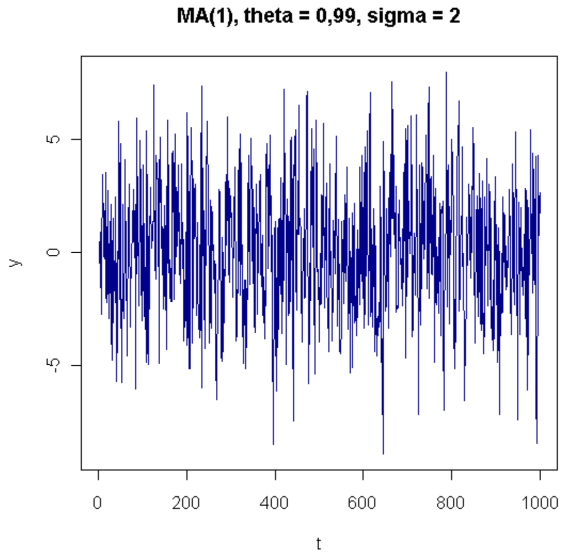


Виж (38).

5. MA(1) процес

$$Y(t) = \varepsilon(t) + \theta.\varepsilon(t-1), \quad t \in T, \tag{4}$$

където θ е реална константа и $\varepsilon \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$.



Виж (39).

1.2 Характеристики на случайните процеси.

Нека случайният процес $\xi := \{\xi(t,\cdot)\}_{t\in T}$ е дефиниран върху вероятностно пространство с филтрация $\mathcal{S}$. Приемаме, че $E\xi(t) < \infty$, за всяко $t \in T$.

Дефиниция 1.2.1 Функцията $\mu(t) = E\xi(t)$, дефинирана върху T се нарича средна функция(mean function) на ξ.

Дефиниция 1.2.2 Нека $E\xi(t)^2 < \infty$, за всяко $t \in T$. Функцията $\sigma^2(t) = D\xi(t)$, дефинирана върху T се нарича вариационна функция на ξ .

- Ако $Y \sim MA(1)$, то Виж (4).

  а.) $\mu(t) = E(Y(t)) = 0$;

  б.)
$$\sigma^2(t) = D\xi(t) = \sigma_\varepsilon^2(1+\theta^2).$$

- Ако $Y \sim AR(1)$, то $\mu(t) = E(Y(t)) = \phi^t.E(Y(1))$. Виж (3).

Доказателство:

$$E(Y(t)) = \phi E(Y(t-1)) + E(\varepsilon(t)) = \phi^2 E(Y(t-2)) + 0 = \ldots$$
$$= \phi^t.E(Y(1)).$$

Обикновено $Y(0) = 0$ или $Y(0) = \varepsilon(0)$ и тогава $E(Y(t)) = 0$.

- Ако $Y \sim AR(1)$ и $T \equiv \{0, 1, 2, ...\}$, то за всяко $0 \leq s < t$ Виж (3).

$$Y(t) = \phi^{t-s}Y(s) + \phi^{t-s-1}\varepsilon(s+1) + ... + \phi^2\varepsilon(t-2) + \phi\varepsilon(t-1) + \varepsilon(t), \tag{5}$$

$$D(Y(t)) = \phi^{2t}.D(Y(0)) + \frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2}\sigma_\varepsilon^2.$$

а.) Ако $|\phi| > 1$, то $D(Y(t)) \to \infty, \quad t \to \infty$.

б.) Ако $|\phi| = 1$, то $D(Y(t)) = D(Y(0)) + t\sigma_\varepsilon^2$.

в.) Ако $|\phi| < 1$, то $D(Y(t)) \to \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}, \quad t \to \infty$.

г.) Ако $Y(0) = \varepsilon(0)$, то

$$D(Y(t)) = \frac{1-\phi^{2(t+1)}}{1-\phi^2}\sigma_\varepsilon^2.$$

д.) Ако $D[Y(0)] = 0$, то за всяко $t > 0$,

$$D(Y(t)) = \frac{1 - \phi^{2t}}{1 - \phi^2}\sigma_\varepsilon^2.$$

е.) Ако $D[Y(0)] = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$, то $|\phi| < 1$ и за всяко $t \geq 0$,

$$D(Y(t)) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2}.$$

ж.) Ако $T \equiv Z$ и процесът е слабо стационарен, то $|\phi| < 1$ и за всяко $t \geq 0$,

$$D(Y(t)) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2}.$$

з.) Ако $Y \sim AR(1)$ и $T \equiv Z$ тогава, процесът е слабо стационарен, тогава и само тогава когато

$$EY(0) = 0, \quad D(Y(t)) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2}.$$

В този случай $|\phi| < 1$.

Дефиниция 1.2.3 Нека $E\xi(t)^2 < \infty$, за всяко $t \in T$. Функцията

$$\gamma(t,s) = cov(\xi(t), \xi(s)) = E\{(\xi(t) - E\xi(t)).(\xi(s) - E\xi(s))\}, \tag{6}$$

дефинирана върху $T \times T$ се нарича автоковариационна функция (ACVF) на ξ .

Ако $\gamma(s,t)$ автоковариационна функция на ξ, тогава за всеки $t_1, t_2, ..., t_n \in T$ $\gamma = (\gamma(t_i, t_j))_{n\times n}$ се нарича автоковариационна матрица на ξ.

Свойства на автоковариационната функция:

1. γ е симетрична.
2. $|\gamma(t_i, t_j)|^2 \leq \gamma(t_i, t_i)\gamma(t_j, t_j)$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., n$;
3. γ е положително дефинитна, т.е.

$$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (\gamma x, x) \geq 0.$$

4. Ако $\xi(t)$ и $\xi(s)$ са независими, то $\gamma(s, t) = 0$.
5. Ако $\gamma(s, t) > 0$, then
   - за $\xi(s) > E\xi(s)$ очакваме $\xi(t) > E\xi(t)$,
   - за $\xi(s) < E\xi(s)$ очакваме $\xi(t) < E\xi(t)$.
6. Ако $\gamma(s, t) < 0$, then
   - за $\xi(s) > E\xi(s)$ очакваме $\xi(t) < E\xi(t)$,
   - за $\xi(s) < E\xi(s)$ очакваме $\xi(t) > E\xi(t)$.

Един гаусов процес е напълно определен (с точност до стохастична еквивалентност) от неговите средна и ACVF.

Неговите крайномерни разпределения са

$$P_{\overrightarrow{\eta}}(\overrightarrow{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\gamma|^{-\frac{1}{2}}.exp\{-\frac{1}{2}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})'.\gamma^{-1}.(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})\},$$

където $n \in \mathbb{N}$, $t_1, t_2, ..., t_n \in T$, $\overrightarrow{\eta} = (\eta(t_1), ..., \eta(t_n))$, $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ и $\overrightarrow{a} = (E\eta(t_1), ..., E\eta(t_n))$.

Дефиниция 1.2.4 Нека $E\xi(t)^2 < \infty$, за всяко $t \in T$. Функцията

$$\rho(t,s) = \frac{\gamma(\xi(t),\xi(s))}{\sqrt{D\,\xi(t).D\xi(s)}}$$

дефинирана върху $T \times T$ се нарича автокорелационна функция на ξ.

Свойства: Ако $\rho(s,t)$ е автокорелационна функция на ξ, то

1. $\rho(s,t) = \rho(t,s)$;
2. $|\rho(t,s)| \leq 1$;
3. Ако $\rho(s,t) > 0$, тогава
   - за $\xi(s) > E\xi(s)$ очакваме $\xi(t) > E\xi(t)$,
   - за $\xi(s) < E\xi(s)$ очакваме $\xi(t) < E\xi(t)$.
4. Ако $\rho(s,t) < 0$, тогава
   - за $\xi(s) > E\xi(s)$ очакваме $\xi(t) < E\xi(t)$,
   - за $\xi(s) < E\xi(s)$ очакваме $\xi(t) > E\xi(t)$.

- Ако $\xi \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$, дефиниран в (1), то

$\rho(s,t)$ зависи само от разликата между s и t. Нещо повече

$$\rho(s,t) = \begin{cases} 0 & , \quad s \neq t \\ 1 & , \quad s = t. \end{cases} \tag{7}$$

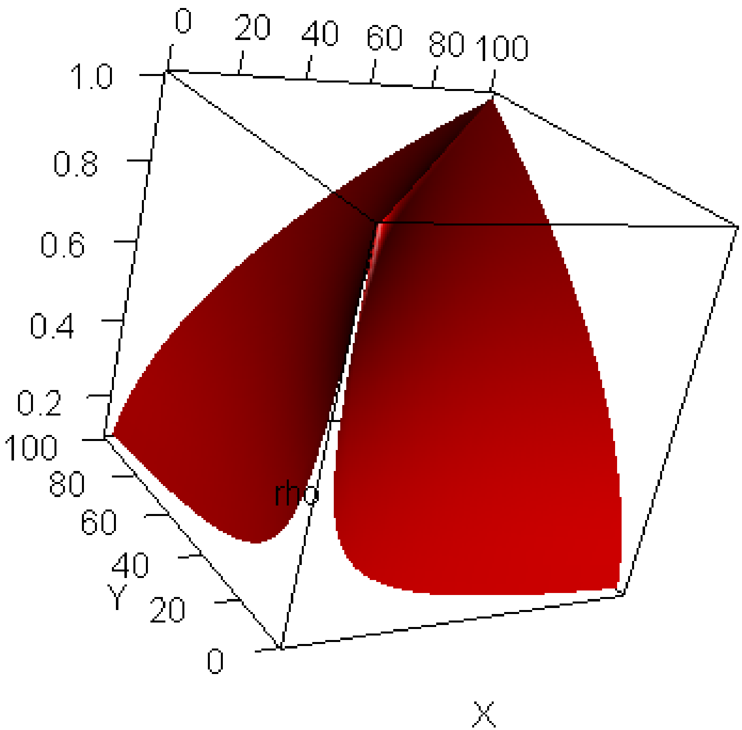
- Ако Y е случайно блуждаене, дефинирано в (2) и $Y(0) = 0$, то $EY(n) = 0$,

$$DY(n) = n.\sigma_\varepsilon^2$$

и

$$\rho(s,t) = \frac{\sqrt{min(s,t)}}{\sqrt{max(s,t)}}. \tag{8}$$

ACF на случайното блуждаене не зависи от вариацията. Виж (40).



Example 1.2.5 Ако Y е $MA(1)$-процес, дефиниран в (4), то

1. $E(Y(t)) = 0$
2. $DY(t) = (1+\theta^2).\sigma_\varepsilon^2$.
3.

$$\gamma(s,t) = \begin{cases} (1+\theta^2).\sigma_\varepsilon^2 & , \quad |s-t| = 0 \\ \theta.\sigma_\varepsilon^2 & , \quad |s-t| = 1 \\ 0 & , \quad |s-t| = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\rho(s,t) = \begin{cases} 1 & , \quad |s-t| = 0 \\ \frac{\theta}{1+\theta^2} & , \quad |s-t| = 1 \\ 0 & , \quad |s-t| = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

ρ не зависи от вариацията.

Информацията за структурата на зависимост на процеса може да бъде описана и с корелацията между $\xi(t)$ и $\xi(s)$ след премахване на линейната зависимост от междинните стойности $\xi(t-1), \xi(t-2), ..., \xi(s+1)$.

Дефиниция 1.2.6 Зависимостта между ξ_1 и ξ_2 при контролирано влияние на ξ_3 се измерва посредством частичен автокорелационен коефициент

$$\rho(\xi_1, \xi_2 | \xi_3) = \frac{\rho(\xi_1, \xi_2) - \rho(\xi_1, \xi_3).\rho(\xi_2, \xi_3)}{\sqrt{(1-\rho^2(\xi_1, \xi_3)).(1-\rho^2(\xi_2, \xi_3))}}$$

Дефиниция 1.2.7 Зависимостта между ξ_1 и ξ_2 при контролирано влияние на ξ_3 and ξ_4 се измерва посредством частичен автокорелационен коефициент

$$\rho(\xi_1, \xi_2 | \xi_3, \xi_4) =$$

$$= \frac{\rho(\xi_1, \xi_2) - \rho(\xi_1, \xi_2 | \xi_3).\rho(\xi_1, \xi_2 | \xi_4)}{\sqrt{(1-\rho^2(\xi_1, \xi_2 | \xi_3)).(1-\rho^2(\xi_1, \xi_2 | \xi_4))}}$$

Дефиниция 1.2.8 Нека $E\xi(t)^2 < \infty$, за всяко $t \in T$. **Частична автокорелационна функция (PACF)** е корелацията между $\xi(t)$ и $\xi(s)$ след премахване на линейната зависимост от междинните стойности $\xi(t-1), \xi(t-2), ..., \xi(s+1)$, разглеждана като функция на s и t, т.е.

$$\rho^*(s,t) = \rho(\xi(s), \xi(t) | \xi(t-1), \xi(t-2), ..., \xi(s+1)).$$

$$\rho^*(s, s+1) = \rho(s, s+1).$$

1.3 Основни класове стохастични процеси.

Дефиниция 1.3.1 Един случаен процес $\{\xi(t,\cdot)\}_{t\in T}$, $E\xi^2(t) < \infty, t \in T$ е слабо стационарен или стационарен в широк смисъл ако:

1. неговата средна функция $\mu(t) = E\xi(t) = const$;
2. неговата автокорелационна функция $\rho(t,s)$ зависи само от разликата $|t-s|$.

Процесите $WN(0,\sigma_\varepsilon^2)$ и $MA(1)$ са слабо стационарни.

- (8) показва, че в общия случай $AR(1)$ процесите не са стационарни дори при $EY(t) = 0$.

- Ако случайният процес Y е $AR(1)$, $DY(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$, $T = \mathbb{Z}$, и $EY(0) = 0$, то $|\phi| < 1$ и Y е слабо стационарен процес. В този случай Виж (3).

$$DY(t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}, \tag{9}$$

$$\gamma(h) = \frac{\phi^h.\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}, \quad h = s - t$$

$$\rho(h) = \phi^h, \quad h = s - t.$$

Паметта на този $AR(1)$ процес е безкрайна.

а.) Ако $|\phi|$ е малко ACF намалява експоненциално бързо.

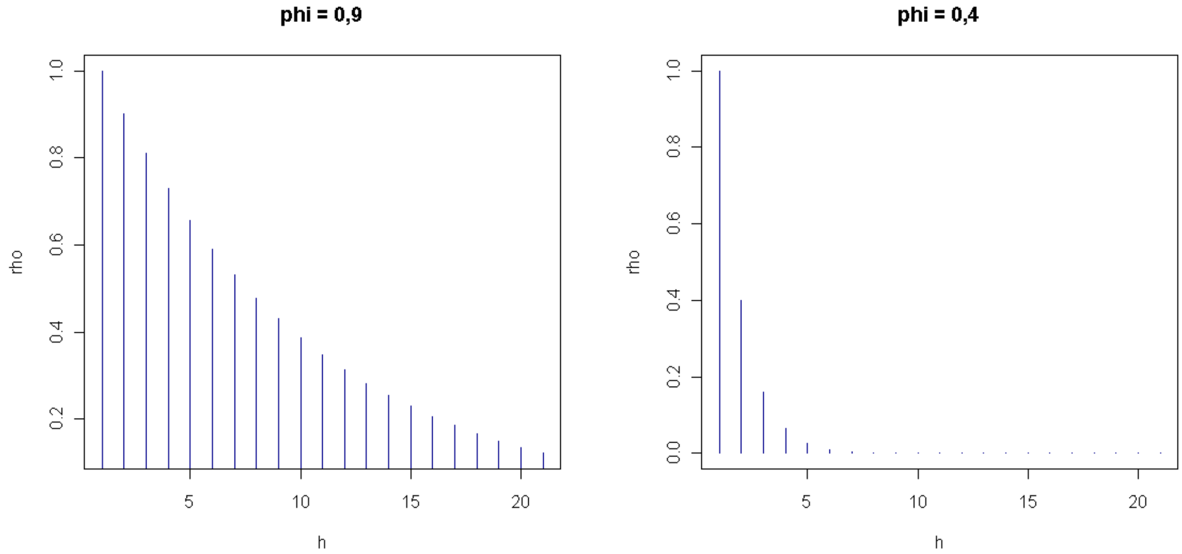
б.) Ако $\phi < 0$ ACF редува положителните и отрицателните знаци.

в.) $\rho^*(1) = \phi$,

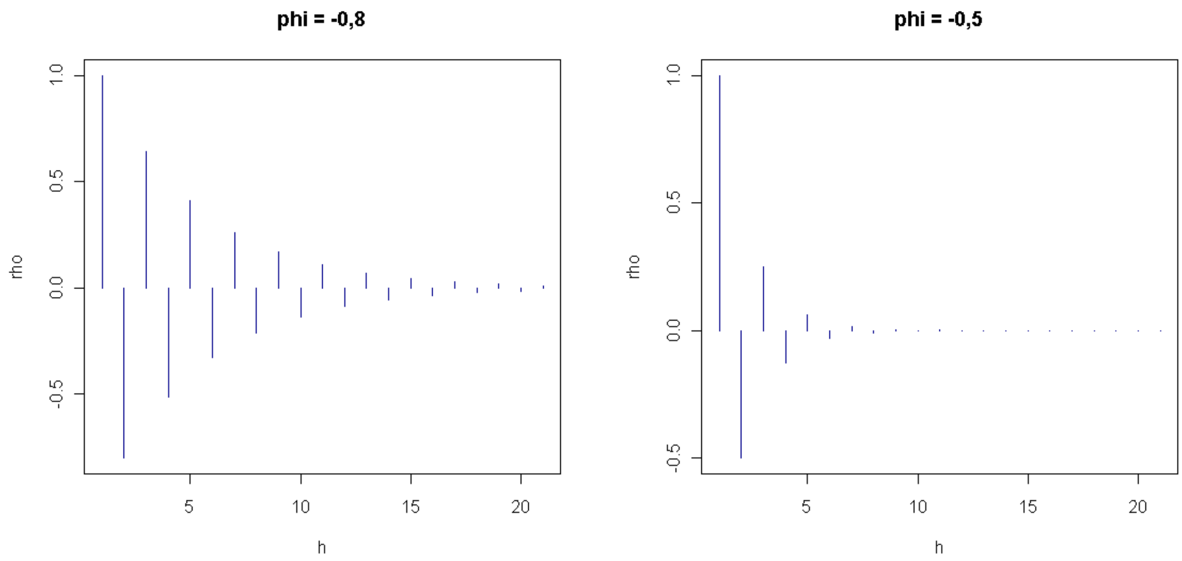
$$\rho^*(2) = \frac{\phi^2 - \phi.\phi}{\sqrt{(1-\phi^2).(1-\phi^2)}} = 0,$$

$$\rho^*(h) = 0, \ h \geq 3, \quad h = s - t.$$

Пример 1.3.2 Графики на $\rho(h) = \phi^h$ за $\phi = 0,9$, $\phi = 0,4$, $\phi = -0,8$ и $\phi = -0,5$.



See (41).



See (41).

Пример 1.3.4 Генерирайте с R software траекториите на $AR(1)$ процеси с параметри

a.) $\phi = 0,3,\ \sigma_\varepsilon = 2;$

b.) $\phi = 0,3,\ \sigma_\varepsilon = 16;$

c.) $\phi = 0,99,\ \sigma_\varepsilon = 2;$

d.) $\phi = 0,99,\ \sigma_\varepsilon = 16;$

e.) $\phi = -0,5,\ \sigma_\varepsilon = 2;$

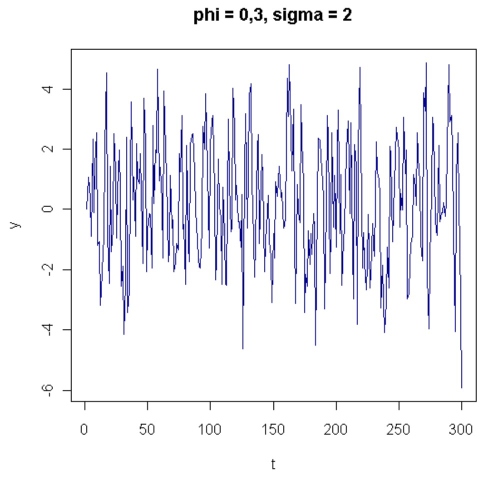
f.) $\phi = -0,5,\ \sigma_\varepsilon = 16;$

g.) $\phi = -0,8,\ \sigma_\varepsilon = 2;$

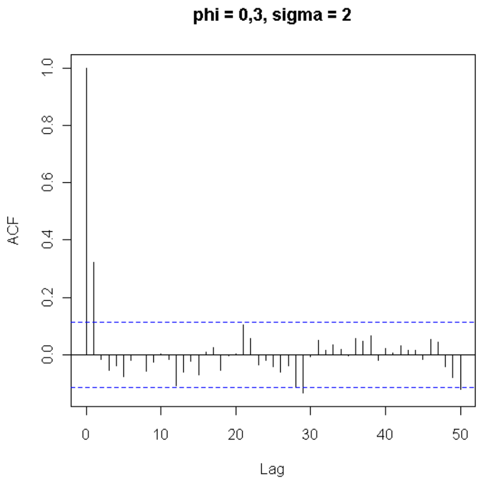
h.) $\phi = -0,8,\ \sigma_\varepsilon = 16.$

(10)

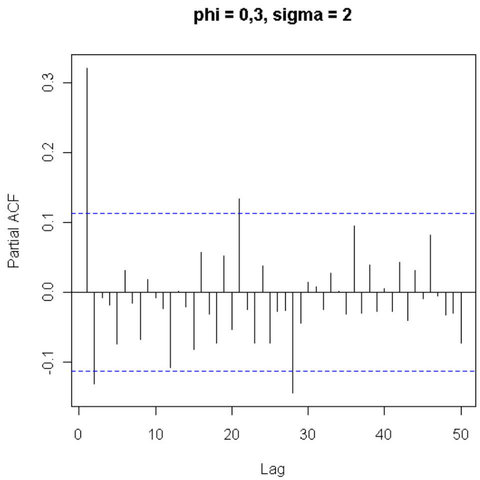
Изчертайте техните ACF и PACF функции.



phi = 0,3, sigma = 2
y
t

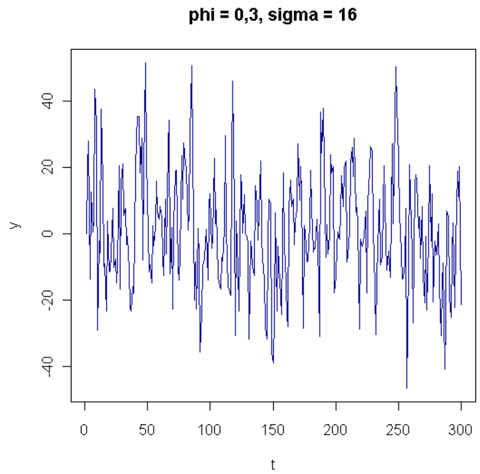


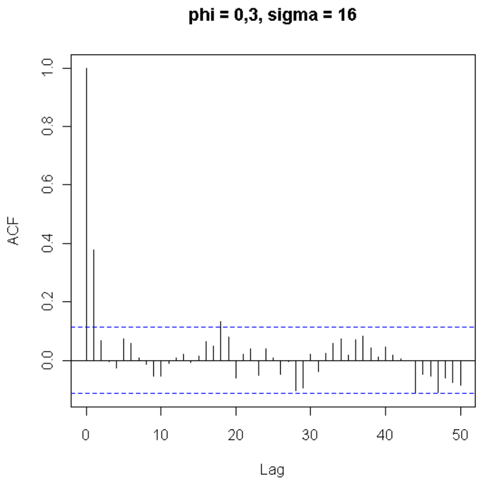
phi = 0,3, sigma = 2
ACF
Lag

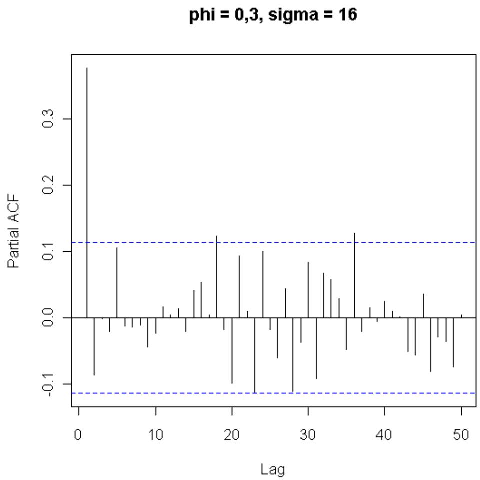


phi = 0,3, sigma = 2
Partial ACF
Lag

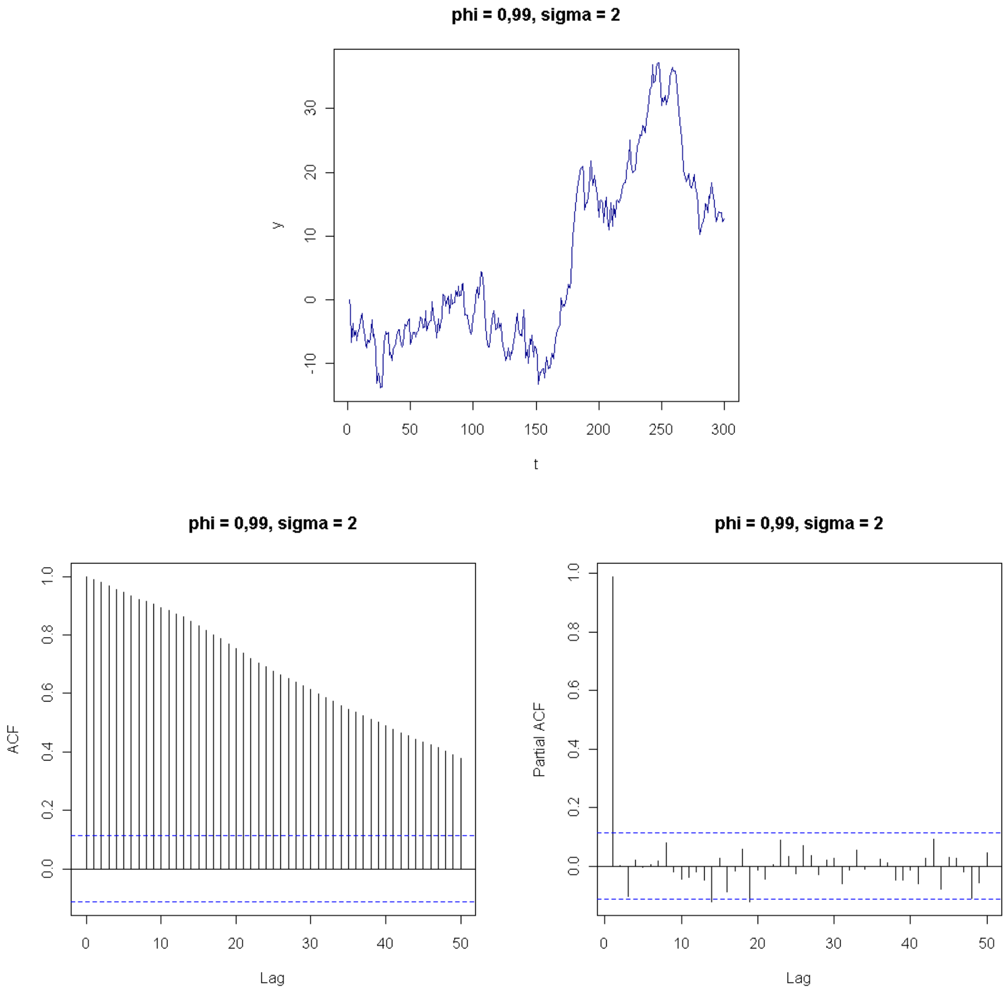
See (42).


phi = 0,3, sigma = 16
y
t

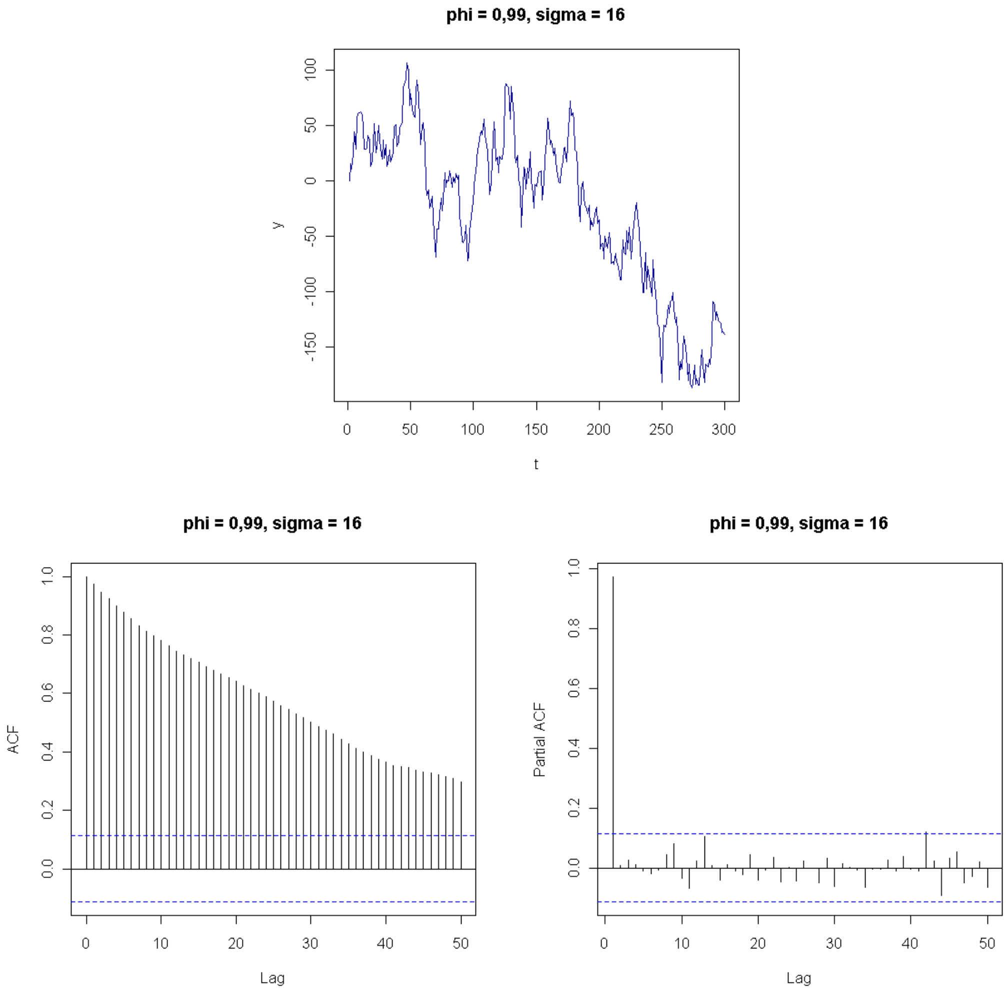

phi = 0,3, sigma = 16
ACF
Lag


phi = 0,3, sigma = 16
Partial ACF
Lag

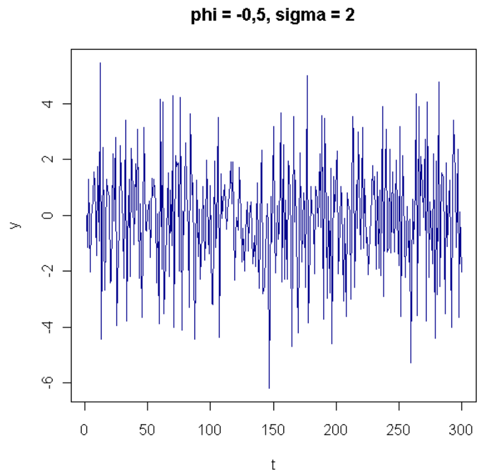
See (42).

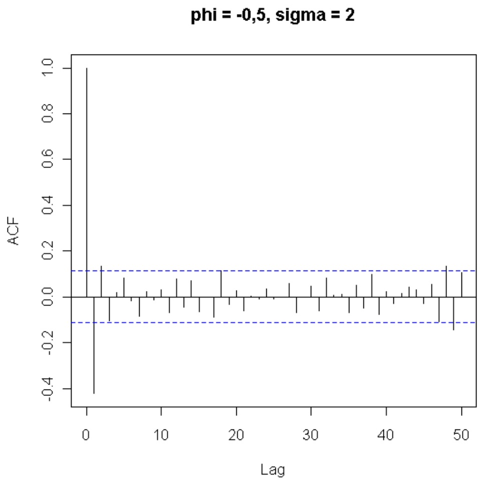

phi = 0,99, sigma = 2
y
t
phi = 0,99, sigma = 2
ACF
Lag
phi = 0,99, sigma = 2
Partial ACF
Lag

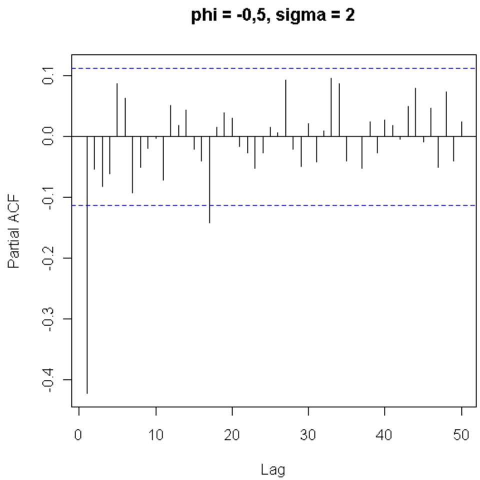
See (42).


phi = 0,99, sigma = 16
y
100
50
0
-50
-100
-150
0
50
100
150
200
250
300
t
phi = 0,99, sigma = 16
ACF
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
10
20
30
40
50
Lag
phi = 0,99, sigma = 16
Partial ACF
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
10
20
30
40
50
Lag

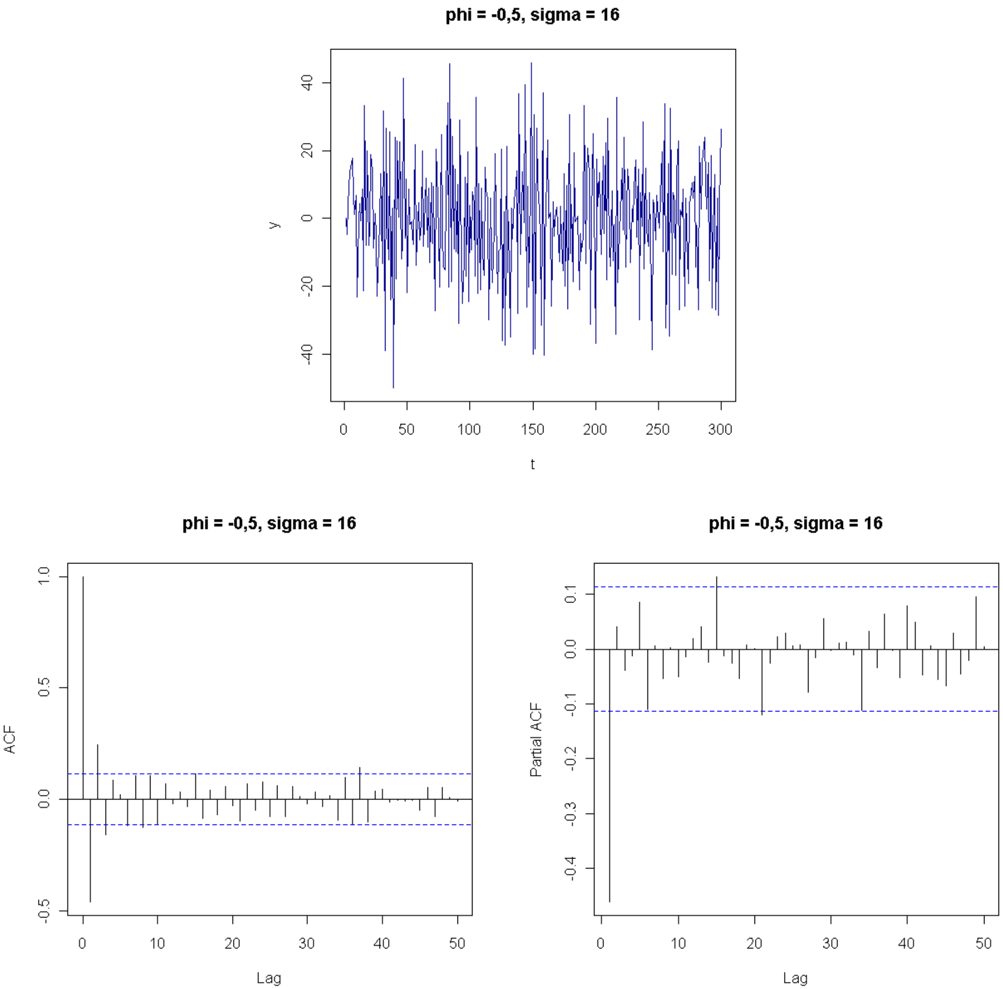
See (42).


phi = -0,5, sigma = 2
y
t

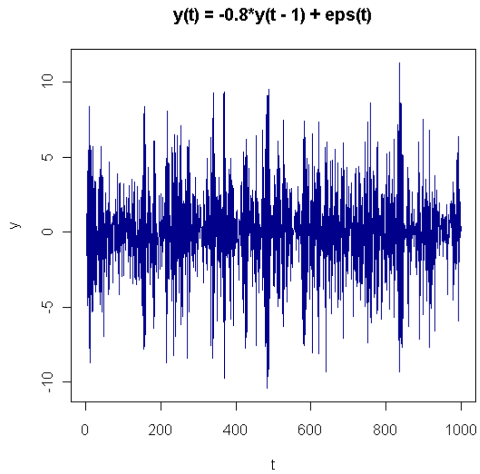

phi = -0,5, sigma = 2
ACF
Lag

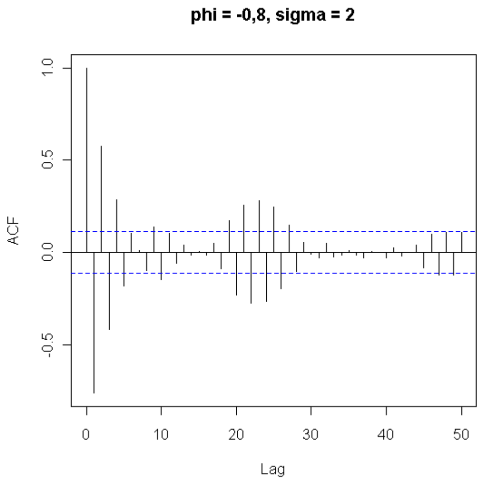

phi = -0,5, sigma = 2
Partial ACF
Lag

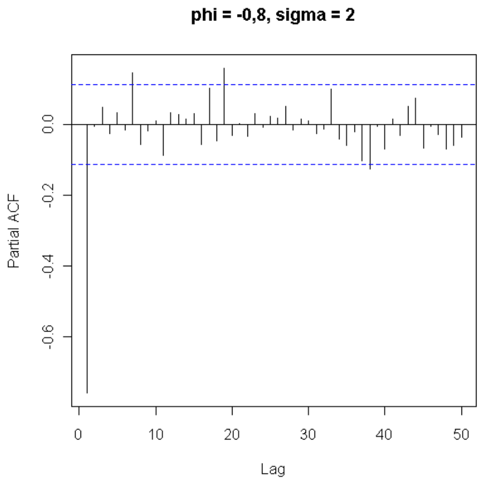
See (42).


phi = -0,5, sigma = 16
y
t
phi = -0,5, sigma = 16
ACF
Lag
phi = -0,5, sigma = 16
Partial ACF
Lag

See (42).

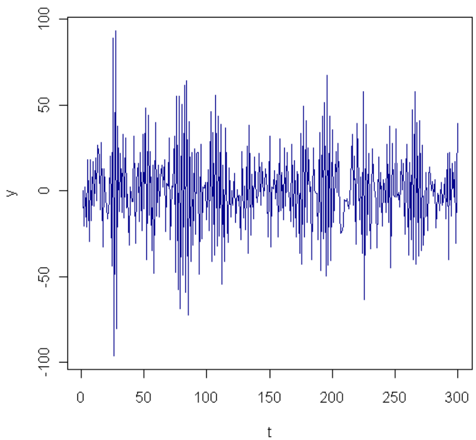

y(t) = -0.8*y(t - 1) + eps(t)
y
-10
-5
0
5
10
0
200
400
600
800
1000
t


phi = -0,8, sigma = 2
ACF
-0.5
0.0
0.5
1.0
0
10
20
30
40
50
Lag

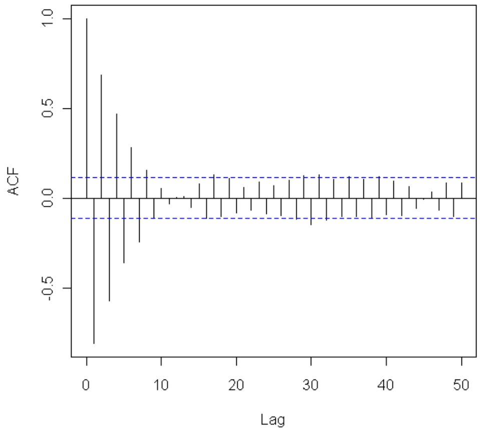

phi = -0,8, sigma = 2
Partial ACF
-0.6
-0.4
-0.2
0.0
0
10
20
30
40
50
Lag

See (42).

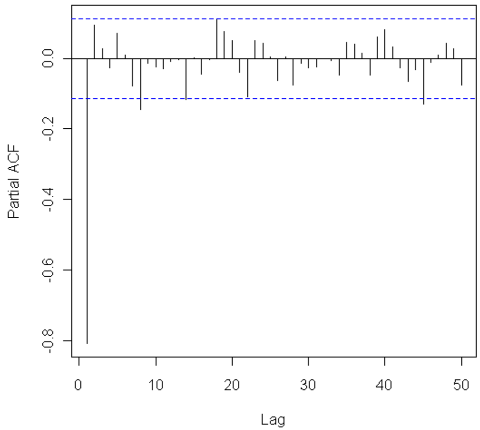
phi = -0,8, sigma = 16

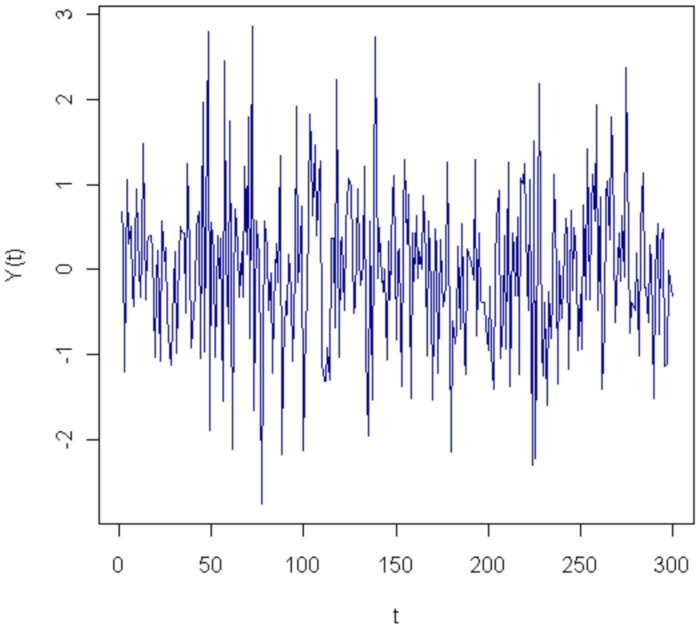


phi = -0,8, sigma = 16



phi = -0,8, sigma = 16





Дефиниция 1.3.5 Един случаен процес $\{\xi(t,\cdot)\}_{t\in T}$ се нарича силно стационарен или стационарен в тесен смисъл ако за всяко $h > 0$ и $t_1, t_2, ..., t_n \in T$

$$F_{\xi(t_1+h),...,\xi(t_n+h)}(x_1, ..., x_n) =$$

$$= F_{\xi(t_1),...,\xi(t_n)}(x_1, ..., x_n).$$

Процесът $IID(0, \sigma^2)$ е силно стационарен.

Дефиниция 1.3.6 Един случаен процес $\{\xi(t,\cdot)\}_{t\in T}$ има независими адитивни нараствания ако за всяко $n = 4, 5, \ldots$ и $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \ldots < t_{n-1} < t_n \in T$ случайните величини

$$\xi(t_2,\cdot) - \xi(t_1,\cdot), \xi(t_4,\cdot) - \xi(t_3,\cdot), \ldots, \xi(t_n,\cdot) - \xi(t_{n-1},\cdot)$$

са независими в съвкупност.

Кои от следните процеси са с независими адитивни нараствания?

1. Броят на "успехите"до момента t в последователност от Бернулиеви опити.
2. $Y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} I\{\eta_1 + \ldots + \eta_i \le t\}, t \ge 0$, където $\eta_1, \eta_2, \ldots$ са експоненциални и н.е.р. сл. величини.

Дефиниция 1.3.7 Един случаен процес $\{\xi(t,\cdot)\}_{t\in\mathbb{R}}$ се нарича хомогенен по време ако за всяко $s < t \in \mathbb{R}$ и за всяко $h > 0$ случайните величини $\xi(t)|\xi(t-h)$ и $\xi(s)|\xi(s-h)$ съвпадат по разпределение.

- Случайното блуждаене е хомогенен по време процес.
- Ако $Y \sim AR(1)$, с $\phi \neq 1$, то не следва, че е хомогенен по време процес. See (3, 5).
- Ако преходните вероятности между дадени две състояния във всеки интервал от време зависят само от дължината на интервала, то процесът е хомогенен по време.
- Ако процесът има стационарни и независими адитивни нараствания, то той е хомогенен по време.

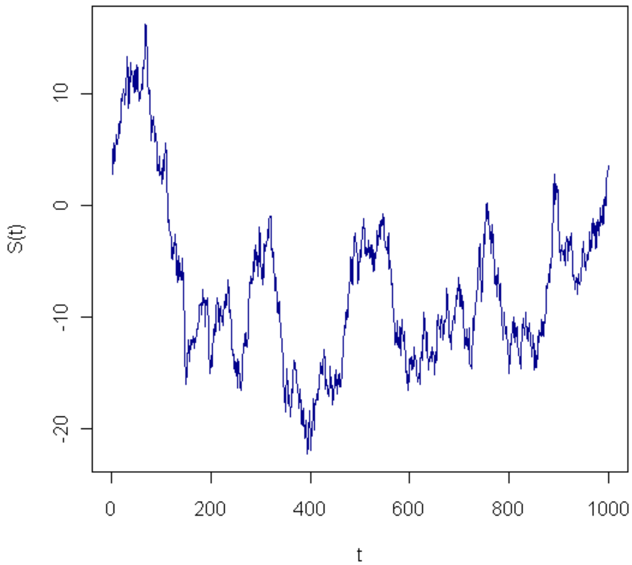
Дефиниция 1.3.8 Един случаен процес $\{\xi(t,\cdot)\}_{t\in T}$ се нарича **мартингал** ако $E\xi(t) < \infty$ за всяко $t \in T$ и за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $t_1 < t_2 < ... < t_n \in T$

$$E\{\xi(t_n)|\xi(t_1),\xi(t_2),...,\xi(t_{n-1})\} = \xi(t_{n-1}),\ \ a.s.$$

Последното е еквивалентно на

$$E\{\xi(t_n)-\xi(t_{n-1})|\xi(t_1),\xi(t_2),...,\xi(t_{n-1})\} = 0.$$

Пример 1.3.9



- Ако $\{\xi(t,\cdot)\}_{t\in T}$ има независими адитивни нараствания и

$$E(\xi(t)-\xi(s))=0,\ \ s,t\in T,$$

то той е мартингал.

- Нека $S(0)=0$ и

$$S(n)=\sum_{i=1}^{n}\eta_i,\ \ t=1,2,...,$$

където $\eta_i\sim N(0,1)$, $i=1,2,...$ са независими.

- Ако Y е AR(1) процес с $\phi \neq 1$, то той не е мартингал. За всяко $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$

$$E\{Y(t_n)|Y(t_1), Y(t_2), ..., Y(t_{n-1})\} = E\{Y(t_n)|Y(t_{n-1})\} = \phi.Y(t_{n-1})$$

п.с. See (3).

$$E\{Y(t_n)|Y(t_{n-1})\} = \phi.Y(t_{n-1}) + E\varepsilon(t) = \phi.Y(t_{n-1}), \quad t \in T,$$

- Ако Y е стационарен AR(1) процес, то познаването на миналото на процеса подобрява прогнозирането. За всяко $0 < t$,

$$D(Y(t)|Y(t-1)) = \phi.Y(t-1) + D\varepsilon(t) = \sigma_\varepsilon^2$$

е по-малка от

$$D(Y(t)) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}.$$

Дефиниция 1.3.10 Един случаен процес $\{\xi(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$ се нарича **процес на Марков** ако за всяко $n \in \mathbb{N}$ и за всеки $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ случайните величини

$$(\xi(t_n)|\xi(t_0),\ldots,\xi(t_{n-1}))$$

и

$$(\xi(t_n)|\xi(t_{n-1}))$$

съвпадат по разпределение.

- Последното е еквивалентно на "миналото и бъдещето на ξ са условно независими, при дадено настояще $\xi(t_{n-1})$ на процеса".
- Процесите с независими адитивни нараствания са Марковски вериги.
- В частност всяко случайно блуждаене е Марковска верига.
- Всеки AR(1) процес е Марковска верига.

Дефиниция 1.3.11 Един случаен процес $\{\xi(t,\cdot)\}_{t\in T}$ се нарича **стохастично непрекъснат в t** ако

$$|\xi(t)-\xi(s)| \to 0, \;\; s\to t$$

по вероятност. Т.е. за всяко $\varepsilon > 0$

$$P(|\xi(t)-\xi(s)| > \varepsilon) \to 0, \;\; s\to t.$$

Дефиниция 1.3.12 Един случаен процес $\{\xi(t,\cdot)\}_{t\in T}$ се нарича **L_2 непрекъснат в t** ако

$$E(\xi(t)-\xi(s))^2 \to 0, \;\; s\to t.$$

L_2 непрекъснатостта на случайните процеси влече тяхната стохастична непрекъснатост.

Дефиниция 1.3.13 Един случаен процес $\{\xi(t,\cdot)\}_{t\in T}$ се нарича стохастично диференцируем в t с $\mathbb{P}$ - производна $\xi'(t)$ ако

$$|\frac{\xi(t)-\xi(s)}{t-s}-\xi'(t)|\to 0,\ \ s\to t \tag{11}$$

по вероятност.

Дефиниция 1.3.14 Един случаен процес $\{\xi(t,\cdot)\}_{t\in T}$ се нарича L_2 - диференцируем в t с $\mathbb{L}^2$ - производна $\xi'(t)$ ако

$$E\left\{\frac{\xi(t)-\xi(s)}{t-s}-\xi'(t)\right\}^2\to 0,\ \ s\to t.$$

Ако ξ е L_2 диференцируем, то той е стохастично диференцируем и двете производни съвпадат.

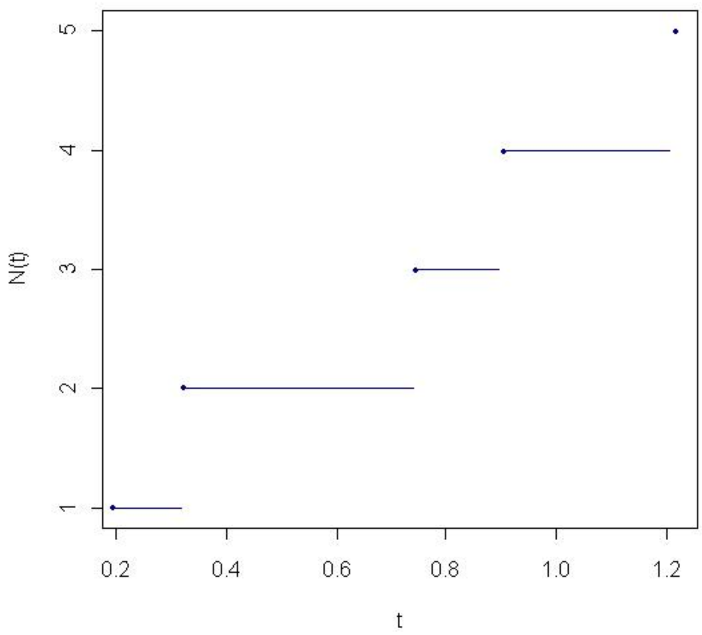
Дефиниция 1.3.15 Един случаен процес

$$\{N(t,\cdot)\}_{t\geq 0} \tag{12}$$

се нарича **броящ процес** ако:

1. за всяко $t \geq 0$, $N(t,\cdot) \geq 0$;
2. за всяко $t \geq 0$ и $\omega \in \Omega$, $N(t,\Omega)$ е целочислена;
3. за всяко $s \leq t$, $N(s) \leq N(t)$, почти сигурно.

За фиксирано $\omega \in \Omega$, ако $s < t$, то $N(t,\omega) - N(s,\omega)$ е броят на събитията, които са се случили в интервала $(s,t]$.



Пример 1.3.16

1. Броят на клиентите в най-близкия магазин до момента t.
2. Броят на "успехите" до момента t.

Обаче броят на успехите в момента t не е броящ процес.

Ако $T_0 = 0$ и T_n е момента на случване на n-тото събитие, $n \in \mathbb{N}$, то броящият процес N може да бъде дефиниран посредством редицата $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I\{T_n \leq t\} = sup\{n \geq 0 : T_n \leq t\},\ t \geq 0.$$

Ако $\tau_n = T_n - T_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, означават интервалите между случванията на две последователни събития, то N може да бъде дефиниран посредством редицата $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$$T_n = \tau_1 + ... + \tau_n, \ \ n \in \mathbb{N}$$

$$N(t) = sup\{n \geq 0 : \tau_1 + ... + \tau_n \leq t\}.$$

Тогава, $P(N(t) = 0) = 1 - P(T_1 \leq t)$ и

$$
\begin{aligned}
P(N(t)=n) &= P(T_n \le t < T_{n+1}) = P(T_n \le t, \overline{T_{n+1} \le t}) \\
&= P(T_n \le t) - P(T_n \le t, T_{n+1} \le t) \\
&= P(T_n \le t) - P(T_{n+1} \le t), \quad n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Ee^{-xT_{n+1}} &= \int_0^\infty e^{-xt} dP(T_{n+1} \le t) \\
&= \int_0^\infty e^{-xt} d[P(T_n \le t) - P(N(t)=n)] \\
&= Ee^{-xT_n} - \int_0^\infty e^{-xt} dP(N(t)=n).
\end{aligned}
$$

Дефиниция 1.3.17 Един броящ процес $\{N(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$ се нарича **ординарен** ако във всеки един момент от време почти сигурно се случва най-много 1 събитие.

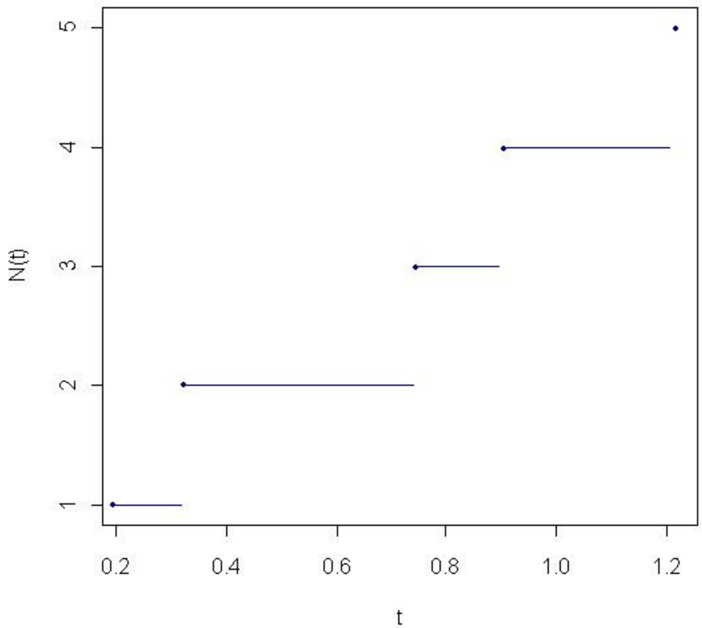
- Ако N^* е ординарен броящ процес, на моментите, в които се случва поне едно събитие, то броящ процес е и случайният процес

$$N(t) = I\{N^*(t) > 0\} \sum_{n=1}^{N^*(t)} X_n,$$

където $X_1, X_2, \ldots$ са случайни величини, с носител на разпределението, $K \subseteq \mathbb{N}$. Той, обаче не е ординарен.

2. Процеси на Поасон.

2.1 Хомогенни поасонови процеси. Дефиниции и свойства.



Дефиниция 2.1.1

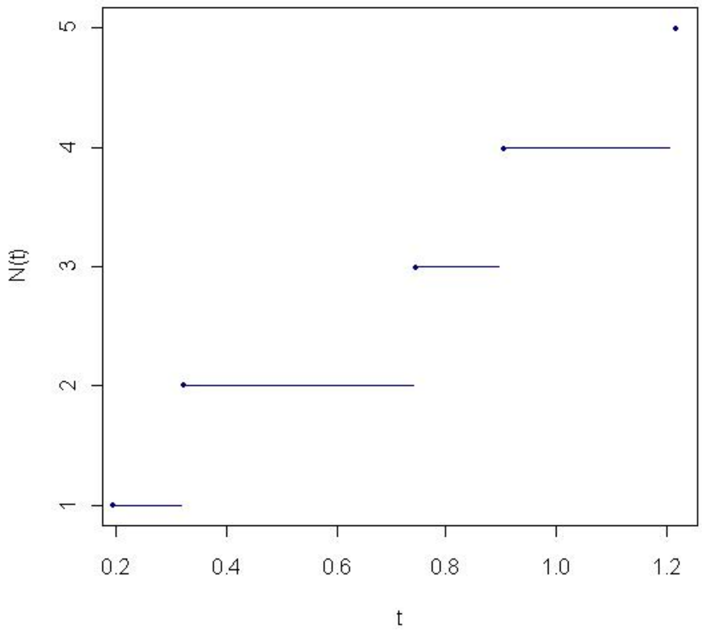
Един случаен процес $\{\pi(t,\cdot)\}_{t\in T}$ се нарича Поасонов процес с интензивност $\lambda > 0$ ако

1. $\pi(0) = 0$ п.с.;
2. π има независими адитивни нараствания;
3. $\forall 0 \leq s < t$,

$$\pi(t) - \pi(s) \sim P(\lambda.(t-s)). \tag{13}$$

Накратко $\pi \sim HPP(\lambda)$.

2.1 Хомогенни поасонови процеси. Дефиниции и свойства.



Дефиниция 2.1.1

Един случаен процес $\{\pi(t,\cdot)\}_{t\in T}$ се нарича Поасонов процес с интензивност $\lambda > 0$ ако

1. $\pi(0) = 0$ п.с.;
2. π има независими адитивни нараствания;
3. $\forall 0 \leq s < t$,
$$P(\pi(t) - \pi(s) = k) = \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}. \quad (14)$$

$$ \tag{15} $$

Дефиниция 2.1.2 Един случаен процес $\{\pi(t, \cdot)\}_{t \in T}$ се нарича Поасонов процес с интензивност $\lambda > 0$ ако

1. $\pi(0) = 0$ п.с.;
2. π има независими и стационарни адитивни нараствания;
3. $\pi(t) \sim P(\lambda t)$,

Т.е. $\forall 0 < t$,

$$P(\pi(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \tag{16}$$

Свойства: Ако $\pi \sim HPP(\lambda)$, $\lambda > 0$, то

1. за всяко $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 < ... < t_n$ и $i_1 \leq ... \leq i_n \in \{0, 1, ...\}$

$$P(\pi(t_1) = i_1, ..., \pi(t_n) = i_n) = \lambda^{i_n}.e^{-\lambda.t_n}.\prod_{j=1}^{n} \frac{(t_j - t_{j-1})^{i_j - i_{j-1}}}{(i_j - i_{j-1})!}.$$

Доказателство: Нека $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 < ... < t_n$ и $i_1 \leq ... \leq i_n \in \{0, 1, ...\}$.

$$P(\pi(t_1) = i_1, ..., \pi(t_n) = i_n) =$$

$$= P(\pi(t_1) = i_1, \pi(t_2) - \pi(t_1) = i_2 - i_1, ..., \pi(t_n) - \pi(t_{n-1}) = i_{n-1} - i_n) =$$

$$= P(\pi(t_1) = i_1).P(\pi(t_2) - \pi(t_1) = i_2 - i_1)...P(\pi(t_n) - \pi(t_{n-1}) = i_{n-1} - i_n) =$$

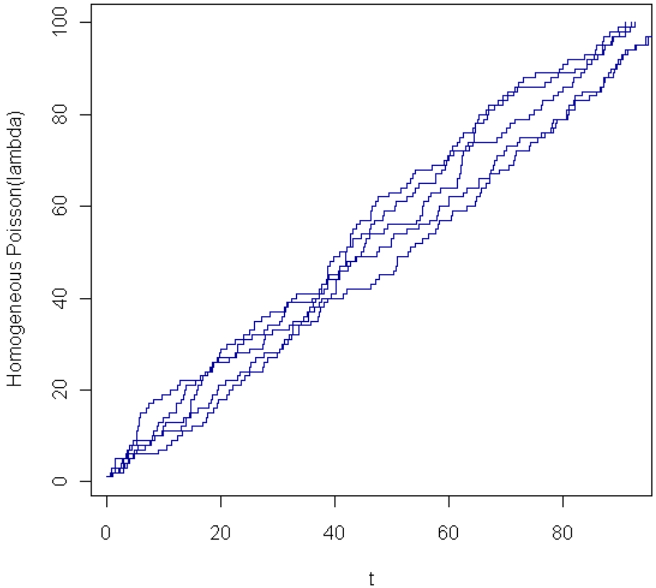
$$= P(\pi(t_1) = i_1).P(\pi(t_2 - t_1) = i_2 - i_1)...P(\pi(t_n - t_{n-1}) = i_{n-1} - i_n).$$

$\square$

Свойства: Ако $\pi \sim HPP(\lambda)$, $\lambda > 0$, то

2. $E\pi(t) = \lambda.t$, $t > 0$.

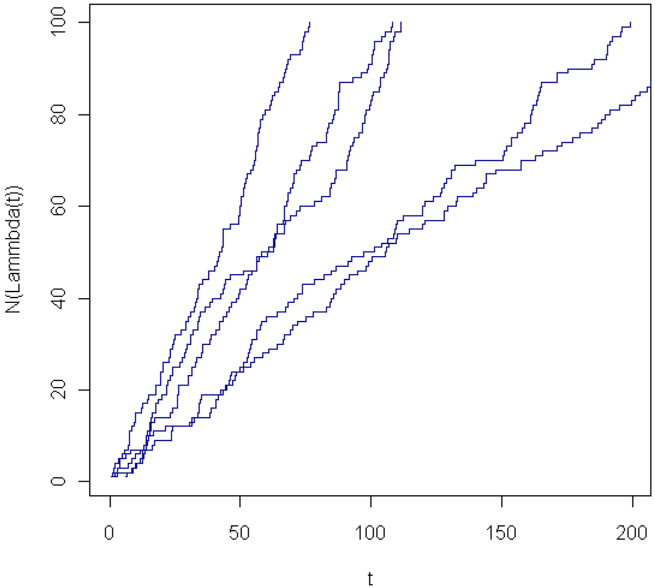
3. $E(\pi(t) - \pi(s)) = \lambda.(t - s)$, $t > s \geq 0$.



Пет траектории на $\pi \sim HPP(1)$.

Свойства: Ако $\pi \sim HPP(\lambda)$, $\lambda > 0$, то

4. $D\ \pi(t) = \lambda.t$, $t > 0$.
5. $D\ (\pi(t) - \pi(s)) = \lambda.(t - s)$, $t > s \geq 0$.



Пет траектории на броящ процес, който е хомогенен по време, но не е $\pi \sim HPP(\lambda)$.

6. $\gamma(t,s) = cov(\pi(t), \pi(s)) = \lambda.min(t,s)$.

Доказателство: Нека $0 \leq s < t$.

$$\gamma(t,s) = cov(\pi(t), \pi(s)) = cov(\pi(t) - \pi(s) + \pi(s), \pi(s)) =$$

$$= cov(\pi(t) - \pi(s), \pi(s)) + cov(\pi(s), \pi(s)) = D\,\pi(s) = \lambda.s.$$

$\square$

Забележка: π не е стационарен процес, но той е хомогенен по време.

7. π е L_2 непрекъснат процес.

Доказателство: Нека $0 \leq s < t$

$$0 \leq E(\pi(t) - \pi(s))^2 = D(\pi(t) - \pi(s))^2 + (E(\pi(t) - \pi(s)))^2 =$$

$$= \lambda(t-s) - \lambda^2(t-s)^2 \to 0, \;\; s \to t.$$

$\square$

8. π е стохастично непрекъснат процес.

Доказателство: Нека $\varepsilon > 0$. Разглеждаме $0 \leq s < t$.

$$0 \leq P(|\pi(t) - \pi(s)| \geq \varepsilon) = \frac{E(\pi(t) - \pi(s))^2}{\varepsilon^2} \to 0, \;\; s \to t.$$

$\square$

9. π е стохастично диференцируем процес с $\mathbb{P}$ - производна 0.

Доказателство: Нека $\varepsilon > 0$. Разглеждаме $0 \leq s < t$.

$$0 \leq P(|\frac{\pi(t)-\pi(s)}{t-s}| \geq \varepsilon) \leq P(|\pi(t)-\pi(s)| \neq 0) =$$

$$= 1 - P(|\pi(t)-\pi(s)| = 0) = 1 - e^{-\lambda.(t-s)} \to 0,\ \ s \to t.$$

$\square$

10. π не е $\mathbb{L}^2$ - диференцируем процес.

Доказателство: Ако съществува $\pi'(t)$ тя би трябвало да е 0. Нека $0 \leq s < t$

$$E|\frac{\pi(t)-\pi(s)}{t-s}|^2 = D|\frac{\pi(t)-\pi(s)}{t-s}| + \left\{E|\frac{\pi(t)-\pi(s)}{t-s}|\right\}^2$$

$$= \frac{\lambda(t-s) - \lambda^2(t-s)^2}{(t-s)^2} \to \infty,\ \ s \to t. \quad \sharp$$

$\square$

11. π е Марковски процес.

Доказателство: Нека $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ и $i_1 \leq \ldots \leq i_n \in \{0, 1, \ldots\}$.

$$P(\pi(t_n) = i_n | \pi(t_1) = i_1, \ldots, \pi(t_{n-1}) = i_{n-1}) =$$

$$= P(\pi(t_n) - \pi(t_{n-1}) = i_n - i_{n-1} | \pi(t_1) = i_1, \ldots, \pi(t_{n-1}) = i_{n-1}) =$$
$$= P(\pi(t_n) - \pi(t_{n-1}) = i_n - i_{n-1} | \pi(t_{n-1}) = i_{n-1}) =$$
$$= P(\pi(t_n) = i_n | \pi(t_{n-1}) = i_{n-1}).$$

$\square$

12. $\pi(t) - \lambda.t$ е мартингал.

Доказателство: Нека $0 \leq s < t$.

$$E(\pi(t) - \lambda.t | \pi(x) - \lambda.x, x \in [0; s]) = E(\pi(t) - \lambda.t | \pi(s) - \lambda.s) =$$

$$= E(\pi(t) - \pi(s) + \pi(s) - \lambda.t | \pi(s) - \lambda.s) =$$
$$= E(\pi(t) - \pi(s)) + \pi(s) - \lambda.t =$$
$$= \pi(s) - \lambda.s, \ a.s.$$

$\square$

13. Реализациите на π са стъпаловидни функции, чиито скокове са равни на 1.

Доказателство: Траекториите на π са ненамаляващи.
Нека A бъде събитието "Съществува поне един скок на π който е по-голям или равен на 2" , $0 \leq a < b$, $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ и

$$t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n},\ i = 1, 2, ..., n.$$

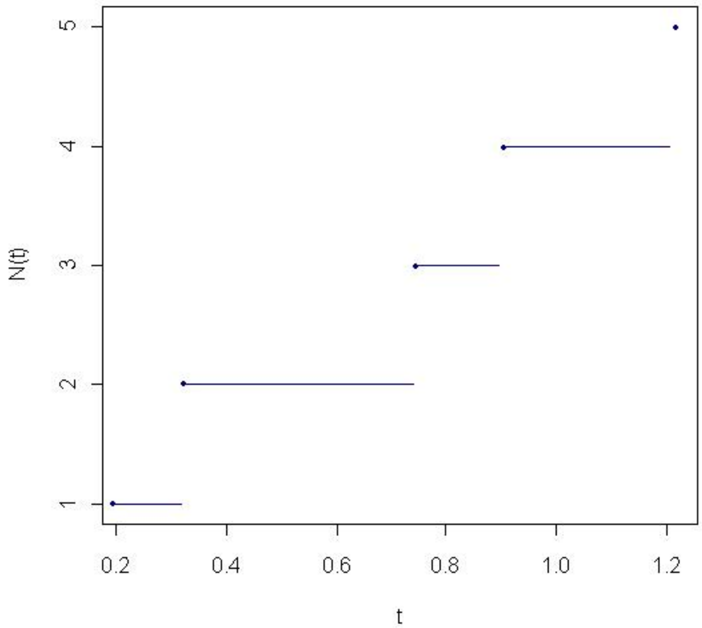
$$0 \leq P(A) = P(\bigcup_{k=1}^{n} \pi(t_k) - \pi(t_{k-1}) \geq 2) \leq \sum_{k=1}^{n} P(\pi(t_k - t_{k-1}) \geq 2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(1 - e^{-\lambda.(t_k - t_{k-1})} - \lambda.(t_k - t_{k-1}).e^{-\lambda.(t_k - t_{k-1})}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(1 - e^{-\frac{\lambda.(b-a)}{n}} - \frac{\lambda.(b-a)}{n}.e^{-\frac{\lambda.(b-a)}{n}}) = n(1 - e^{-\frac{\lambda.(b-a)}{n}}) - \lambda.(b-a).e^{-\frac{\lambda.(b-a)}{n}}.$$

Последният израз клони към 0 когато $n \to \infty$.

Хомогенните Поасонови процеси π са броящи процеси, чиито траектории имат скокове равни на 1.



Не е противоречие фактът, че Поасоновите процеси са стохастично непрекъснати тъй като скоковете на π са в случайни моменти от време. При различните елементарни изходи $\omega \in \Omega$ те са в различни моменти от време.

Очевидно всяка траектория на π е прекъсната.

Виж (12).

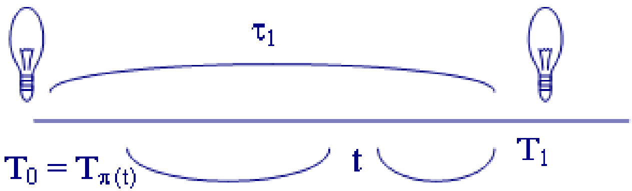
За фиксирани $\omega \in \Omega$ и $t \geq 0$, $\pi(t, \omega)$ може да бъде интерпретиран като броят на "събитията" които са се случили до момента t.

- Дефинираме τ_n като времето между $(n-1)$-вото и n-тото "събитие". Редицата $\tau_1, \tau_2, \ldots$ се състои от интервалите между реализациите на съответните "събития".
- Нека $T_0 = 0$ и T_n да е момента на сбъдването на n-тото "събитие", т.е.,

$$T_n = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n, \ n \in \mathbb{N}.$$

- Независимостта на адитивните нараствания означава, че броят на "събитията", които се случват в непресичащи се интервали от време са независими.
- Стационарните адитивни нараствания означават, че броят на "събитията", които се случват в един интервал от време зависи само от дължината на интервала, но не и от позицията му.

Интересно е да се разгледат интервалите между две последователни "събития".



Свойство 14.

Ако $\pi \sim HPP(\lambda)$, $\lambda > 0$, то моментът T_1 на първия скок или интервалът до случването на първото "събитие"

$$\tau_1 \sim Exp(\lambda).$$

Доказателство: "$\pi(t) < 1$" $\Longleftrightarrow$ "$T_1 \geq t$". Разглеждаме $t > 0$.

$$P(T_1 < t) = 1 - P(T_1 \geq t) = 1 - P(\pi(t) < 1) =$$

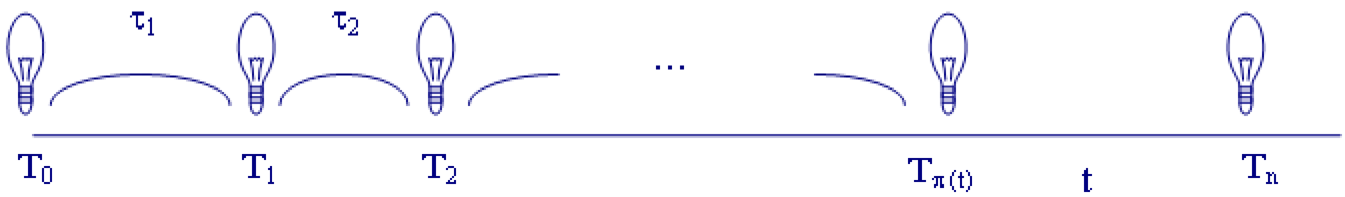
$$= 1 - P(\pi(t) = 0) = 1 - e^{-\lambda . t}.$$

$\square$

Свойство 15.

Ако $\pi \sim HPP(\lambda)$, $\lambda > 0$, тогава моментът на n-тия скок или времето до настъпването на n-тото "събитие"

$$T_n = \tau_1 + ... + \tau_n \sim Erlang(n, \lambda).$$



Доказателство: Нека $t > 0$ "$\pi(t) < n$"$\Longleftrightarrow$ "$T_n \geq t$"

$$P(T_n < t) = 1 - P(T_n \geq t) = 1 - P(\pi(t) < n) = P(\pi(t) \geq n) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} P(\pi(t) = k) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda.t)^k}{k!}.e^{-\lambda.t}.$$

$\square$

16. Моментът на n-тия скок или времето до настъпването на n-тото "събитие"

$$T_n = \tau_1 + ... + \tau_n \sim Gamma(n, \lambda).$$

Доказателство: Нека $t > 0$.

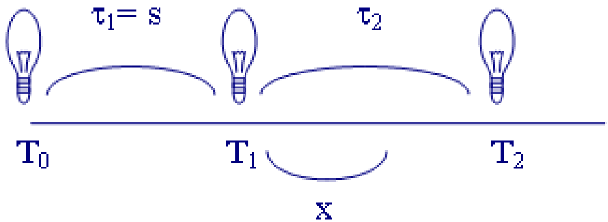
$$\frac{\partial P(T_n < t)}{\partial t} = \lambda.\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda.t)^{k-1}}{(k-1)!}.e^{-\lambda.t} - \lambda\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda.t)^{k}}{k!}.e^{-\lambda.t} =$$

$$= \lambda.\frac{(\lambda.t)^{n-1}}{(n-1)!}.e^{-\lambda.t}.$$

$\square$

17. Интервалите τ_i, $i \in \mathbb{N}$ между скоковете са независими експоненциално разпределени с параметър λ.

Доказателство: Видяхме, че $\tau_1 \sim Exp(\lambda)$.



Нека $x > 0$ и $s > 0$.

$$P(\tau_2 > x|\tau_1 = s) =$$

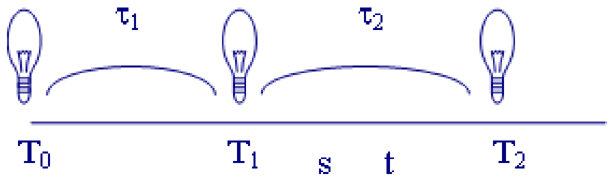
$$= P(\pi(x+s)-\pi(s) = 0|\pi(s) = 1) =$$

$$= P(\pi(x) = 0) = e^{-\lambda.x}.$$

$$P(\tau_2 > x) = \int_0^\infty P(\tau_2 > x|\tau_1 = s)dP(\tau_1 < s) = \int_0^\infty e^{-\lambda.x}\lambda e^{-\lambda.s}ds = e^{-\lambda.x}.$$

и след това прилагаме ММИ. $\square$

18. $(T_1|\pi(t) = 1) \sim U(0,t)$.



Доказателство: Нека $0 \leq s$ и $0 \leq t$. Разглеждаме функцията на разпределение

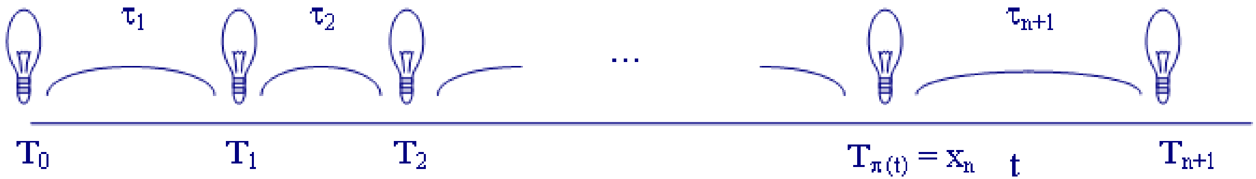
$$P(T_1 < s|\pi(t) = 1) = \frac{P(T_1 < s, \pi(t) = 1)}{P(\pi(t) = 1)} = (*).$$

За $s < t$

$$(*) = \frac{P(\pi(s) = 1, \pi(t) = 1)}{P(\pi(t) = 1)} = \frac{P(\pi(s) = 1, \pi(t) - \pi(s) = 0)}{P(\pi(t) = 1)} =$$

$$= \frac{P(\pi(s) = 1).P(\pi(t) - \pi(s) = 0)}{P(\pi(t) = 1)} = \frac{s}{t}.$$

19. $f_{T_1,T_2,\ldots,T_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n|\pi(t) = n) = \frac{n!}{t^n}, \;\; 0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n;$



Док-во: Нека $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n < t$. Разглеждаме

$$f_{T_1,T_2,\ldots,T_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n|\pi(t) = n) =$$

$$= f_{\tau_1,\tau_1+\tau_2,\ldots,\tau_1+\ldots+\tau_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n|\pi(t) = n) = (1).$$

Означаваме с A_n събитието "$\tau_1 = x_1, \tau_1+\tau_2 = x_2, \ldots, \tau_1+\ldots+\tau_n = x_n$".

$$(1) = \frac{P(\pi(t) = n|A_n).f_{\tau_1,\tau_1+\tau_2,\ldots,\tau_1+\ldots+\tau_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{P(\pi(t) = n)} =$$

$$= \frac{P(x_n \leq t < x_n + \tau_{n+1}|A_n).f_{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n}(x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1})}{P(\pi(t) = n)} =$$

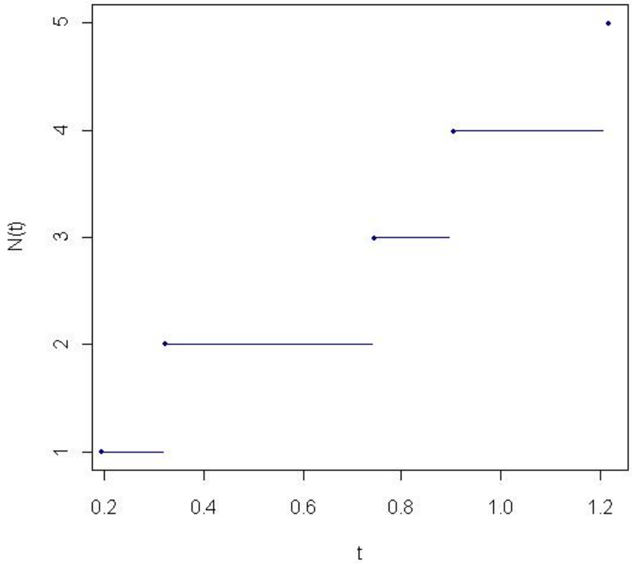
$$= \frac{P(t - x_n < \tau_{n+1}).f_{\tau_1}(x_1).f_{\tau_2}(x_2 - x_1)\ldots f_{\tau_n}(x_n - x_{n-1})}{P(\pi(t) = n)} = \frac{n!}{t^n}, \; x_n \leq t.$$

20. Случайните величини $(T_1, T_2, ..., T_n | \pi(t) = n)$ съвпадат по разпределение с наредените статистики $U_{(1,n)} \le U_{(2,n)} \le ... \le U_{(n,n)}$, на н.е.р. $U(0, t)$ случайни величини.

21. Бъдещото време на чакане

$$\nu(t) := T_{\pi(t)+1} - t \sim Exp(\lambda).$$

Дефиниция 2.1.3 Един броящ процес $\{\pi(t,\cdot)\}_{t\in T}$ се нарича хомогенен Поасонов процес с интензивност $\lambda > 0$ ако



1. $\pi(0) = 0$ п.с.;
2. π има стационарни и независими адитивни нараствания;
3. $P(\pi(h) = 1) = \lambda.h + o(h)$, $h \to 0$;
4. $P(\pi(h) \geq 2) = o(h)$, $h \to 0$.

$o(x)$ означава безкрайно малка функция на x, т.е. такава, че

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 0.$$

$\pi(t)$ представлява общият брой "събития" които са се случили до момента t.

Теорема 2.1.4 Дефиниции 2.1.1, 2.1.2 и 2.1.3 са еквивалентни.

Виж (14) и (15).

Доказателство на "D.2.1.3 $\Rightarrow$ D.2.1.1":

$$P_0(t+h) := P(\pi(t+h)=0) = P(\pi(t)=0, \pi(t+h)-\pi(t)=0) =$$

$$= P(\pi(t)=0).P(\pi(t+h)-\pi(t)=0) =$$
$$= P_0(t).P(\pi(h)=0) = P_0(t).P_0(h) =$$
$$= P_0(t).(1-\lambda.h+o(h))$$
$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h} = -\lambda.P_0(t) - P_0(t)\frac{o(h)}{h}$$

Тогава $P_0'(t) = -\lambda.P_0(t)$ and

$$P_0(t) = e^{-\lambda.t} + c,$$

където от $P_0(0) = 1$, $c = 0$.

Разглеждаме $P_n(t+h) := P(\pi(t+h) = n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

$$P_n(t+h) = P(\pi(t) = n, \pi(t+h) - \pi(t) = 0) +$$

$$+ P(\pi(t) = n-1, \pi(t+h) - \pi(t) = 1) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} P(\pi(t) = n-i, \pi(t+h) - \pi(t) = i) =$$

$$= P_n(t)P_0(h) + P_{n-1}(t)P_1(h) + o(h) =$$

$$= P_n(t).(1 - \lambda.h) + P_{n-1}(t)\lambda.h + o(h).$$

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda.(P_n(t) - P_{n-1}(t)) + \frac{o(h)}{h}$$

Тогава $P_n'(t) = -\lambda.(P_n(t) - P_{n-1}(t))$.

Умножаваме последното уравнение с $e^{\lambda.t}$ и получаваме

$$e^{\lambda.t}.[P_n'(t) + \lambda.P_n(t)] = \lambda.e^{\lambda.t}.P_{n-1}(t)$$

$$\frac{\partial\, e^{\lambda.t} P_n(t)}{\partial\, t} = \lambda.e^{\lambda.t}.P_{n-1}(t)$$

За $n = 1$

$$\frac{\partial\, e^{\lambda.t} P_1(t)}{\partial\, t} = \lambda, P_1(0) = 0.$$

$$e^{\lambda.t} P_1(t) = \lambda.t + c, c = 0$$

$$P_1(t) = \lambda.t.e^{-\lambda.t}.$$

Означаваме с $Q_n(t) := e^{\lambda.t} P_n(t)$. Тогава

$$Q_n'(t) = \lambda.Q_{n-1}(t),\ Q_n(0) = 0.$$

По ММИ

$$Q_n(t) = \int_0^t Q_n'(x)dx = \int_0^t \frac{\lambda^n.x^{n-1}}{(n-1)!}dx = \frac{\lambda^n.t^n}{n!}$$

влече

$$Q_n(t) = \frac{\lambda^n.t^n}{n!}.$$

Тогава

$$P_n(t) = \frac{(\lambda.t)^n}{n!}.e^{-\lambda.t},\ t \geq 0.$$

2.2 Обобщения на Поасонови процеси.

Poisson splitting: Нека $\pi \sim HPP(\lambda)$, $\lambda > 0$. Приемаме, че събитията са два вида. Всяко събитие е от първия вид с вероятност $p \in [0, 1]$ и от втория вид с вероятност $q = 1 - p$. Тогава случайният процес π_1, който брои събитията от първия вид, които са се случили до момента t е HPP$(\lambda.p)$. Случайният процес π_2, който брои събитията от втория вид, които са се случили до момента t е HPP$(\lambda.q)$.

Poisson merger: Предполагаме, че случайните процеси

$$\pi_1 \sim HPP(\lambda_1),\ \ \lambda_1 > 0$$

и

$$\pi_2 \sim HPP(\lambda_2),\ \ \lambda_2 > 0$$

са независими. Суперпозицията

$$\pi_1 + \pi_2 \sim HPP(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Дефиниция 2.2.1 Един случаен процес $\{S(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$ се нарича съставен Поасонов процес с интензивност $\lambda > 0$ ако съществува семейство от н.е.р. сл. величини $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\pi \sim HPP(\lambda)$, които са независими от $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и дефинирани върху същото вероятностно пространство:

$$S(t,\cdot) = \sum_{i=1}^{\pi(t,\cdot)} \xi_i(\cdot), \quad \sum_{i=1}^{0} = 0.$$

Накратко $S \sim CPP(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Пример 2.2.2 Предполагаме, че исковете в застрахователна компания постъпват според хомогенен Поасонов процес. Ако ξ_i е i-тия размер на иска $i = 1, 2, \ldots$ и ако тези случайни величини са н.е.р., то $S(t,\cdot)$ е общият брой на исковете до момента t.

Свойства: Ако $S \sim CPP(\lambda)$, $\lambda > 0$, то

1. $ES(t) = \lambda.t.E\xi_1$.

Доказателство: $E(S(t)|\pi(t) = n) = E\xi_1 + E\xi_2 + \ldots + E\xi_n = n.E\xi_1$.

$$ES(t) = \sum_{n=0}^{\infty} E(S(t)|\pi(t) = n).P(\pi(t) = n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n.E\xi_1.P(\pi(t) = n) = E\pi(t).E\xi_1.$$

$\square$

2. $D\,S(t) = \lambda.t.(D\,\xi_1 + E^2\xi_1)$.

Дефиниция 2.2.3 Един броящ процес π_λ е нехомогенен Поасонов процес с функция на интензивността $\lambda(t) : [0, \infty) \to [0, \infty)$ ако:

1. $\pi_\lambda(0) = 0$;
2. π_λ има независими адитивни нараствания;
3. за всяко $0 \leq a < b$

$$\pi_\lambda(b) - \pi_\lambda(a) \sim P(\int_a^b \lambda(x)dx).$$

Накратко $\pi \sim PP(\lambda(t))$.

Свойства: Ако $\pi_\lambda \sim PP(\lambda(t))$, $\lambda(t) : [0, \infty) \to [0, \infty)$, то

1.
$$E\{\pi_\lambda(b) - \pi_\lambda(a)\} = \int_a^b \lambda(x)dx;$$

2.
$$D\{\pi_\lambda(b) - \pi_\lambda(a)\} = \int_a^b \lambda(x)dx.$$

3. Ако процесите $\pi_1 \sim PP(\lambda_1(t))$ и $\pi_2 \sim PP(\lambda_2(t))$ са независими, то тяхната суперпозиция
$$\pi_1 + \pi_2 \sim PP(\lambda_1(t) + \lambda_2(t)).$$

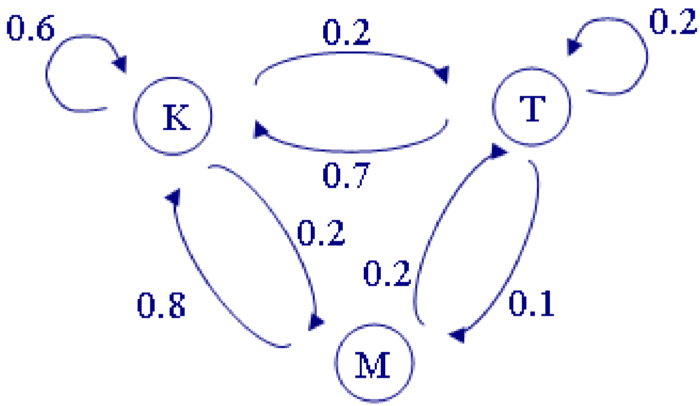
3. МАРКОВСКИ ВЕРИГИ.

3.1. Дефиниция. Примери. Преходни вероятности. Уравнения на Колмогоров-Чепмен.

Пример 3.1.1 Разглеждаме дневните навици на човек, който пие само чай, кафе или мляко за закуска и чиито навици на хранене се подчиняват на следните правила:

- Той пие точно по една от тези три напитки сутрин.
- Ако той пие кафе днес, утре той ще пие кафе с вероятност 0.6, а мляко и чай с равни вероятности.
- Ако той пие чай днес, утре той ще пие чай с вероятност 0.2, кафе с вероятност 0.7 и мляко с вероятност 0.1.
- Ако той пие мляко днес, той няма да пие отново мляко утре, но ще пие чай с вероятност 0.2 или кафе с вероятност 0.8.

Тези хранителни навици могат да бъдат описани посредством следния граф.



(17)

Ако 1 означава "днес", 2-"утре",

- K(t)-"Лицето пие кафе по време t",
- T(t)-"Лицето пие чай по време t",
- M(t)-"Лицето пие мляко по време t",

то по условие е дадено, че:

- $P(K(2)|K(1)) = 0.6$; $P(T(2)|K(1)) = 0.2$; $P(M(2)|K(1)) = 0.2$;
- $P(K(2)|T(1)) = 0.7$; $P(T(2)|T(1)) = 0.2$; $P(M(2)|T(1)) = 0.1$;
- $P(K(2)|M(1)) = 0.8$; $P(T(2)|M(1)) = 0.2$; $P(M(2)|M(1)) = 0$;

Тези хранителни навици могат да бъдат описани посредством следната матрица на преходните вероятности

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.8 & 0.2 & 0.0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Ако преходните вероятности, описващи поведението на лицето всеки ден спрямо предния се запазват същите с течение на времето и разпределението на поведението на лицето в началото на изследването е

- $\mathrm{P}(\mathrm{K}(1)) = 0.5$;
- $\mathrm{P}(\mathrm{T}(1)) = 0.4$;
- $\mathrm{P}(\mathrm{M}(1)) = 0.1$,

намерете разпределението на поведението на лицето Виж (43).

а.) утре, т.е. $\mathrm{P}(\mathrm{K}(2))$, $\mathrm{P}(\mathrm{T}(2))$, $\mathrm{P}(\mathrm{M}(2))$,

б.) в други ден, т.е. $\mathrm{P}(\mathrm{K}(3))$, $\mathrm{P}(\mathrm{T}(3))$, $\mathrm{P}(\mathrm{M}(3))$.

в.) по в други ден. т.е. $\mathrm{P}(\mathrm{K}(4))$, $\mathrm{P}(\mathrm{T}(4))$, $\mathrm{P}(\mathrm{M}())$.

а.) Намерете разпределението на поведението на лицето утре, т.е. P(K(2)), P(T(2)), P(M(2)). Виж (17,18,43).

Решение: а.) Използваме Формулата за пълната вероятност

$$
\begin{aligned}
P(K(2)) &= P(K(2)|K(1))(K(1)) + P(K(2)|T(1))(T(1)) \\
&+ P(K(2)|M(1))P(M(1)) \\
&= 0.6\,0.5 + 0.7\,0.4 + 0.8\,0.1 = 0.66 \\
P(T(2)) &= P(T(2)|K(1))P(K(1)) + P(T(2)|T(1))(T(1)) \\
&+ P(T(2)|M(1))P(M(1)) \\
&= 0.2\,0.5 + 0.2\,0.4 + 0.2\,0.1 = 0.20 \\
P(M(2)) &= P(M(2)|K(1))P(K(1)) + P(M(2)|T(1))P(T(1)) \\
&+ P(M(2)|M(1))P(M(1)) \\
&= 0.2\,0.5 + 0.1\,0.4 + 0.0\,0.1 = 0.14
\end{aligned}
$$

б.) Намерете разпределението на поведението на лицето в други ден, т.е. P(K(3)), P(T(3)), P(M(3)). Виж (17,18,43,43).

Решение: б.) Използваме Формулата за пълната вероятност

$$
\begin{aligned}
P(K(3)) &= P(K(3)|K(2))(K(2)) + P(K(3)|T(2))(T(2)) \\
&+ P(K(3)|M(2))P(M(2)) \\
&= 0.6\,0.66 + 0.7\,0.20 + 0.8\,0.14 = 0.648 \\
P(T(3)) &= P(T(3)|K(2))P(K(2)) + P(T(3)|T(2))(T(2)) \\
&+ P(T(3)|M(2))P(M(2)) \\
&= 0.2\,0.66 + 0.2\,0.20 + 0.2\,0.14 = 0.2 \\
P(M(3)) &= P(M(3)|K(2))P(K(2)) + P(M(3)|T(2))P(T(2)) \\
&+ P(M(3)|M(2))P(M(2)) \\
&= 0.2\,0.66 + 0.1\,0.20 + 0.0\,0.14 = 0.152
\end{aligned}
$$

в.) Намерете разпределението на поведението на лицето по в други ден, т.е. P(K(3)), P(T(3)), P(M(3)). Виж (17,18,43,44).

Решение: в.) Използваме Формулата за пълната вероятност

$$
\begin{aligned}
P(K(4)) &= P(K(4)|K(3))(K(3)) + P(K(4)|T(3))(T(3)) \\
&+ P(K(4)|M(3))P(M(3)) \\
&= 0.6\,0.648 + 0.7\,0.20 + 0.8\,0.152 = 0.6504 \\
P(T(4)) &= P(T(4)|K(3))P(K(3)) + P(T(4)|T(3))(T(3)) \\
&+ P(T(4)|M(3))P(M(3)) \\
&= 0.2\,0.648 + 0.2\,0.20 + 0.2\,0.152 = 0.2 \\
P(M(4)) &= P(M(4)|K(3))P(K(3)) + P(M(4)|T(3))P(T(3)) \\
&+ P(M(4)|M(3))P(M(3)) \\
&= 0.2\,0.648 + 0.1\,0.20 + 0.0\,0.152 = 0.1496
\end{aligned}
$$

Пример 3.1.1 (Продължение)

г.) Ако лицето пие мляко днес, опишете тези хранителни навици в следващите 2 дни посредством дърво като на всяко ниво съответства на номера на деня. Над всеки клон нанесете съответните преходни вероятности.

д.) Ако лицето пие мляко днес, намерете вероятността на събитието то да пие мляко и в други ден.

Решение: д.) Използваме първо дефиницията за условна вероятност, след това форлмулата за пърната вероятност, формулата за умножение на вероятностите и накрая Марковското свойство и получаваме

$$
\begin{aligned}
P(M(3)|M(1)) &= \frac{P(M(3), M(1))}{P(M(1))} \\
&= \frac{1}{P(M(1))}\,[P(M(3)K(2)M(1)) + P(M(3)T(2)M(1)) \\
&+ P(M(3)M(2)M(1))] \\
&= \frac{P(M(1)P(K(2)|M(1))P(M(3)|K(2)M(1))}{P(M(1))} \\
&+ \frac{P(M(1)P(T(2)|M(1))P(M(3)|T(2)M(1))}{P(M(1))} \\
&+ \frac{P(M(1)P(M(2)|M(1))P(M(3)|M(2)M(1))}{P(M(1))}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(M(3)|M(1)) &= \frac{P(M(1)P(K(2)|M(1))P(M(3)|K(2))}{P(M(1))} \\
&+ \frac{P(M(1)P(T(2)|M(1))P(M(3)|T(2))}{P(M(1))} \\
&+ \frac{P(M(1)P(M(2)|M(1))P(M(3)|M(2))}{P(M(1))} \\
&= P(K(2)|M(1))P(M(3)|K(2)) \\
&+ P(T(2)|M(1))P(M(3)|T(2)) \\
&+ P(M(2)|M(1))P(M(3)|M(2)) \\
&= P_{31}P_{13} + P_{32}P_{23} + P_{33}P_{33} \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} P_{3i}P_{j3} = P_{33}^2
\end{aligned}
$$

Виж (43,44).

Пример 3.1.2.(Самостоятелна работа) В социологията е удобно хората да се класифицират според техния доход в "нисък", "среден" и "горен" клас. Разглеждаме онаследяването на нивото на доходите. С емпирично изследване е установено, че те се подчиняват на следните правила:

- Всяко лице е точно в един от тези три класа.
- Ако то е от "нисък" клас на доходите, неговите наследници ще са с "нисък" клас, с вероятност 0.65, със "среден" клас, с вероятност 0.28, и с "висок" клас, с вероятност 0.07.
- Ако то е от "среден" клас на доходите, неговите наследници ще са с "нисък" клас, с вероятност 0.15, със "среден" клас, с вероятност 0.67, и с "висок" клас, с вероятност 0.18.
- Ако то е от "висок" клас на доходите, неговите наследници ще са с "нисък" клас, с вероятност 0.12, със "среден" клас, с вероятност 0.36, и с "висок" клас, с вероятност 0.52.

а.) Опишете онаследяването на класа на доходите с помощта на граф.

б.) Опишете онаследяването на класа на доходите посредством матрица на преходните вероятности.

в.) Опишете онаследяването на класа на доходите посредством дърво като всяко ниво съответства на номера на съответното поколение.

- Ако 1 означава "текущо поколение", 2-"следващо поколение",
  - H(t)-"Лицето от t-то поколение е с нисък клас на доходите",
  - C(t)-"Лицето от t-то поколение е със среден клас на доходите",
  - B(t)-"Лицето от t-то поколение е с висок клас на доходите",

  ако преходните вероятности, описващи наследяването на класа на доходите на всяко поколение спрямо предходното се запазват същите с течение на времето и разпределението на лицата според класа на доходите им, в началото на изследването е

$$P(H(1)) = 0.3; \quad P(C(1)) = 0.5; \quad P(B(1)) = 0.2,$$

  намерете разпределението на лицата според класа на доходите им

  г.) при второто поколение, т.е. P(H(2)), P(C(2)), P(B(2)),

  д.) при трето поколение, т.е. P(H(3)), P(C(3)), P(B(3)),

  е.) при четвърто поколениер т.е. P(H(4)), P(C(4)), P(B(4)).

Дефиниция 3.1.3 Случайният процес $\{\xi(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$ се нарича **процес на Марков** ако за всяко $n \in \mathbb{N}$ и за всеки $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ случайните величини

$$(\xi(t_n)|\xi(t_0), \dots, \xi(t_{n-1}))$$

и

$$(\xi(t_n)|\xi(t_{n-1}))$$

съвпадат по разпределение.

Последното е еквивалентно на факта, че миналото $\xi(t_0), \dots, \xi(t_{n-2})$ и бъдещето $\xi(t_n)$ на ξ са условно независими при дадено настоящо състояние $\xi(t_{n-1})$.

Дефиниция 3.1.4 Множество X_ξ от възможните стойности на процеса на Марков $\{\xi(t, \cdot)\}, t \geq 0$ за фиксиран момент от време се нарича пространство от състоянията на процеса.

Дефиниция 3.1.5 Марковските процеси с дискретно множество от състояния се наричат Марковски вериги.

Обикновено

$$X_\xi = \{0, 1, ..., N\}, \quad X_\xi = \{-N, ..., -1, 0, 1, ..., N\},$$

$$X_\xi = \{0, 1, ...\}, \quad X_\xi = \{..., -1, 0, 1, ...\}.$$

Да означим с "$\xi(t, \omega) = i$"$-$ събитието "Марковската верига е в състояние i в момента t". Ако $T = 0, 1, ...,$ то "$\xi(n, \omega) = i$" означава, че Марковската верига е в състояние i на n-та стъпка, $n \in T$.

Дефиниция 3.1.6 Марковските вериги с $T = 0, 1, \ldots$ се наричат вериги на Марков с дискретен параметър.

За веригата на Марков $\{\xi(n, \cdot)\}_{n=0,1,\ldots}$ с дискретен параметър еволюцията на процеса на една стъпка се описва посредством

$$P(\xi(n+1) = i_{n+1} | \xi(0) = i_0, \xi(1) = i_1, , \ldots, \xi(n) = i_n) = \tag{19}$$

$$= P(\xi(n+1) = i_{n+1} | \xi(n) = i_n) =: p_{i_n i_{n+1}}(n), \ n \in \mathbb{N}, \ i_1, i_2, \ldots, i_n \in X_\xi.$$

$$\sum_{k \in X_\xi} p_{ik}(n) = 1, \forall i \in X_\xi, n \in \mathbb{N}.$$

Уравнението (19) се нарича Марковско свойство, което е известно още като "липса на памет".

Дефиниция 3.1.7 Промените в състоянията на дадена Марковска верига се наричат преходи. Вероятностите, асоциирани с различните промени на състоянията се наричат преходни вероятности.

Дефиниция 3.1.8 Във една Марковска верига с дескретен параметър $\{\xi(n,\cdot)\}_{n=0,1,\dots}$, еволюцията на процеса след момента k, $k \in \mathbb{N}$ и за n, $n \in \mathbb{N}$ моменти от време се описва от

$$P(\xi(n+k) = j | \xi(k) = i) =: p_{ij}^{(n)}(k). \tag{20}$$

$$\sum_{m \in X_\xi} p_{im}^{(n)}(k) = 1, \forall i \in X_\xi, n \in \mathbb{N}.$$

Вероятностите $p_{ij}^{(n)}(k)$ се наричат вероятности за преход на n-стъпки в момента k. Тяхната матрица ще означаваме с $\mathbf{P}^{(n)}(k)$. Тя е стохастична матрица, т.е.,

1. $p_{ij}^{(n)}(k) \in [0,1]$, $i \in X_\xi$, $j \in X_\xi$;
2. $$\sum_{j \in X_\xi} p_{ij}^{(n)}(k) = 1, \forall i \in X_\xi.$$

По дефиниция $\mathbf{P}^{(0)}(k) = \mathbf{P}^0(k) = \mathbf{I}$ е единичната матрица.

Дефиниция 3.1.9 Вероятностите

$$p_i(0) = P(\xi(0) = i),\ \ i \in X_\xi$$

се наричат начално разпределение на ξ. Векторът $\overrightarrow{p}(0)$ се нарича вектор с началните вероятности на Марковската верига.

Дефиниция 3.1.10 За $n \in \mathbb{N}$, означаваме маргиналните разпределения с

$$p_i(n) = P(\xi(n) = i),\ \ i \in X_\xi.$$

Векторът $\overrightarrow{p}(n)$ се нарича вероятностно разпределение на $\xi(n)$ или разпределение в състоянията в момента n.

Дефиниция 3.1.11 Ако за всяко $i, j \in X_\xi$ and $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{ij} = P(\xi(n+1) = j|\xi(n) = i)$$

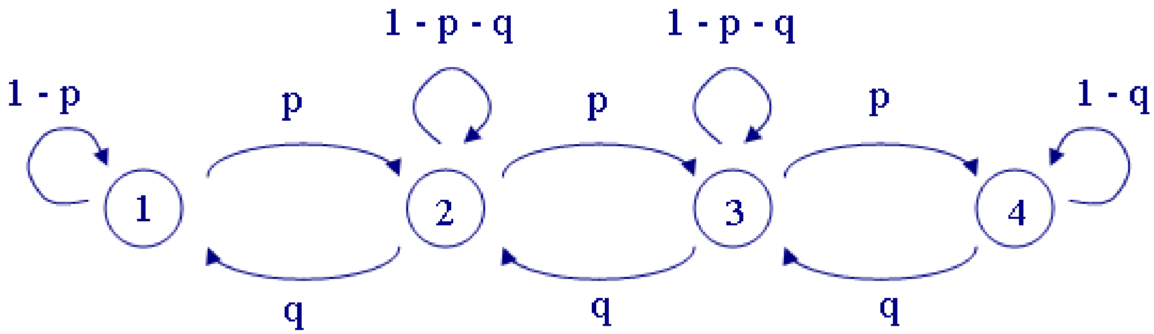
не зависят от n, то Маковската верига ξ се казва, че притежава стационарни преходни вероятности и процесът се нарича хомогенна Марковска верига.

Ако ξ е хомогенна Марковска верига, матрицата от преходните вероятности на една стъпка

$$\mathbf{P} = [p_{ij}]_{i \in X_\xi, j \in X_\xi} \tag{21}$$

се нарича матрица на преходните вероятности на ξ. Тя е стохастична матрица.

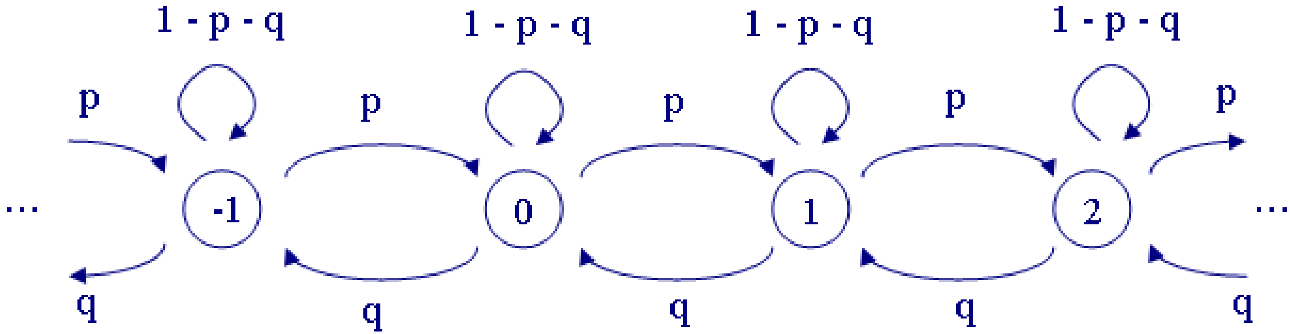
Пример 3.1.12 Случайното блуждаене с крайно пространство от състоянията $X_\xi = 1, 2, 3, 4$ и такива, че



има матрица на преходните вероятности

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ q & 1-p-q & p & 0 \\ 0 & q & 1-p-q & p \\ 0 & 0 & q & 1-q \end{pmatrix}$$

Пример 3.1.13 Случайното блуждаене с изброимо пространство от състоянията $X_\xi = \mathbb{Z}$ и такива, че



има матрица на преходните вероятности

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & q & 1-p-q & p & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & q & 1-p-q & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & q & 1-p-q & p & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 1-p-q & p & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Ако ξ е хомогенна Марковска верига с дискретен параметър, еволюцията на процеса на n стъпки се описва с

$$P(\xi(n+k)=j|\xi(k)=i)=P(\xi(n)=j|\xi(0)=i)=:p_{ij}^{(n)}. \tag{22}$$

Виж (20).

В този случай матрицата на преходните вероятности на n-стъпки

$$\mathbf{P}^{(n)}(k)=\mathbf{P}^{(n)},\ \ k\in\mathbb{N}$$

и $\mathbf{P}^{(0)}(k)=\mathbf{P}^{(0)}=\mathbf{P}^{0}=\mathbf{I}$ е единичната матрица.

Вероятностно разпределение на $\xi(n)$. Ако ξ е хомогенна марковска верига с дискретно време, тогава за $k = 0, 1, \ldots$ и $m = 0, 1, \ldots$

i.) $\overrightarrow{p}(k) = \overrightarrow{p}(0).\mathbf{P}^{(k)}$;

ii.) $\overrightarrow{p}(k+m) = \overrightarrow{p}(k).\mathbf{P}^{(m)}$.

Доказателство: i.) Нека $i \in X_\xi$

$$p_i(k) = P(\xi(k) = i) = \sum_{s \in X_\xi} P(\xi(k) = i | \xi(0) = s).P(\xi(0) = s) =$$

$$= \sum_{s \in X_\xi} p_{si}^{(k)}.p_s(0) = \overrightarrow{p}(0).\mathbf{P}^{(k)}.$$

ii.) Нека $i \in X_\xi, \quad p_i(k+m) =$

$$= P(\xi(k+m) = i) = \sum_{s \in X_\xi} P(\xi(k+m) = i | \xi(m) = s).P(\xi(m) = s) =$$

$$= \sum_{s \in X_\xi} p_{si}^{(k)}.p_s(m) = \overrightarrow{p}(k).\mathbf{P}^{(m)}.$$

Уравнения на Колмогоров-Чепмен (Chapman–Kolmogorov equation).
Ако ξ хомогенна марковска верига с дискретно време, то

$$\mathbf{P}^{(k+m)} = \mathbf{P}^{(k)}.\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P}^{(m)}.\mathbf{P}^{(k)}, \ \ k, m = 0, 1, \ldots \tag{23}$$

Доказателство: Нека $i \in X_\xi$, $j \in X_\xi$ и $k \in \mathbb{N}$

$$p_{ij}^{(k+m)} = P(\xi(k+m) = j|\xi(0) = i) =$$

$$= \sum_{s \in X_\xi} P(\xi(k+m) = j|\xi(0) = i, \xi(k) = s).P(\xi(k) = s|\xi(0) = i) =$$

$$= \sum_{s \in X_\xi} P(\xi(k+m) = j|\xi(k) = s).P(\xi(k) = s|\xi(0) = i) =$$

$$= \sum_{s \in X_\xi} P(\xi(m) = j|\xi(0) = s).P(\xi(k) = s|\xi(0) = i) = \sum_{s \in X_\xi} p_{sj}^{(m)}.p_{is}^{(k)}.$$

Следващото свойство е непосредствено следствие от уравненията на Колмогоров-Чепмен и метода на математическата индукция.

Твърдение 3.1.14 Ако ξ е хомогенна Марковска верига, то

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n, n \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Следствие 3.1.15 Ако ξ е хомогенна Марковска верига с дискретен параметър, тогава за $k = 0, 1, \ldots$ и $m = 0, 1, \ldots$

i.) $\overrightarrow{p}(k) = \overrightarrow{p}(0).\mathbf{P}^k$;

ii.) $\overrightarrow{p}(k+m) = \overrightarrow{p}(k).\mathbf{P}^m$;

iii.) процесът е напълно определен от вероятностното разпределение на началните му състояния $\overrightarrow{p}(0)$ и неговата матрица на преходните вероятности $\mathbf{P}$.

$$P(\xi(0) = i_0, \xi(1) = i_1, , \ldots, \xi(n) = i_n) = p_{i_0}(0).p_{i_0 i_1}.p_{i_1 i_2}.\ldots.p_{i_{n-1} i_n}.$$

Example 3.1.16 Разглеждаме дневните навици на човек, който пие само чай, кафе или мляко за закуска и чиито навици на хранене се подчиняват на следните правила:

- Той пие точно по една от тези три напитки сутрин.
- Ако той пие кафе днес, утре той ще пие кафе с вероятност 0.6, а мляко и чай с равни вероятности.
- Ако той пие чай днес, утре той ще пие чай с вероятност 0.2, кафе с вероятност 0.7 и мляко с вероятност 0.1.
- Ако той пие мляко днес, той няма да пие отново мляко утре, но ще пие чай с вероятност 0.2 или кафе с вероятност 0.8.

Ако днес човекът пие чай за закуска, намерете вероятностите на събитията човекът да пие чай след

а.) 3 дни;

б.) 7 дни;

в.) 10 дни за закуска.

$$
P = \begin{array}{c} \\ K \\ T \\ M \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} K & T & M \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
P^3 = \begin{array}{c} \\ K \\ T \\ M \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} K & T & M \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0.648 & 0.2 & 0.152 \\ 0.652 & 0.2 & 0.148 \\ 0.656 & 0.2 & 0.144 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
P^7 = \begin{array}{c} \\ K \\ T \\ M \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} K & T & M \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0.65 & 0.2 & 0.15 \\ 0.65 & 0.2 & 0.15 \\ 0.65 & 0.2 & 0.15 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
P^{10} = \begin{array}{c} \\ K \\ T \\ M \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} K & T & M \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0.65 & 0.2 & 0.15 \\ 0.65 & 0.2 & 0.15 \\ 0.65 & 0.2 & 0.15 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Виж (22) и (45).

Ако началното поведение на човека се описва с вероятностите

$$\overrightarrow{p}(0) = (0.5,\ 0.4,\ 0.1)$$

намерете вероятностите, че той ще пие

г.) чай;

д.) кафе;

е.) мляко

след 3 (7 или 10) дни за закуска. Виж (45).

Ако началното поведение на човека се описва с вероятностите

$$\overrightarrow{p}(0) = (0.65,\ 0.2,\ 0.15)$$

намерете вероятностите, че той ще пие

ж.) чай;

з.) кафе;

и.) мляко на следващия ден за закуска.

Ако $\overrightarrow{p}(0) = (0.65,\ 0.2,\ 0.15)$, то

$$\overrightarrow{p}(3) = \overrightarrow{p}(0).\mathbf{P}^3 = (0.6504,\ 0.2,\ 0.1496)$$

$$\overrightarrow{p}(7) = \overrightarrow{p}(0).\mathbf{P}^7 = (0.6500006,\ 0.2,\ 0.1499994)$$

$$\overrightarrow{p}(10) = \overrightarrow{p}(0).\mathbf{P}^{10} = (0.65,\ 0.2,\ 0.15)$$

Намерете очакваните проценти, по време на дълъг период от дни, в които човекът ще пие

к.) кафе;

л.) мляко;

м.) чай за закуска.

Можем да направим прогноза за две и повече стъпки напред:

$$P(\xi(n+2) = i_{n+2},\ \xi(n+1) = i_{n+1} | \xi(0) = i_0,\ \xi(1) = i_1, ..., \xi(n) = i_n) =$$

$$= P(\xi(n+2) = i_{n+2},\ \xi(n+1) = i_{n+1} | \xi(n) = i_n) =$$

$$= P(\xi(n+2) = i_{n+2} | \xi(n+1) = i_{n+1}).P(\xi(n+1) = i_{n+1} | \xi(n) = i_n) =$$

$$= p_{i_{n+1} i_{n+2}}(n+1).p_{i_n i_{n+1}}(n).$$

Ако веригата е хомогенна, то

$$P(\xi(n+2) = i_{n+2},\ \xi(n+1) = i_{n+1} | \xi(0) = i_0,\ \xi(1) = i_1, ..., \xi(n) = i_n) =$$

$$= p_{i_{n+1} i_{n+2}}.p_{i_n i_{n+1}}.$$

Твърдение 3.1.17 Ако ξ е хомогенна Марковска верига, то:

1.
$$P(\xi(n+1)=j,\ldots,\xi(n+k-1)=j,\xi(n+k)\neq j|\xi(n)=j)=$$
$$p_{jj}^{k-1}.(1-p_{jj}),\quad k=1,2,\ldots$$

2. Съответната случайна величина η_j, която е такава, че
$$P(\eta_j=k)=P(\xi(n{+}1)=j,\ldots,\xi(n{+}k{-}1)=j,\xi(n{+}k)\neq j|\xi(n)=j)$$
е изместено геометрично разпределена с параметър $1-p_{jj}$.

3.
$$E\eta_j=\frac{1}{1-p_{jj}}$$
е средното време на пребиваване в състояние j, при условие, че веригата започне в състояние j.

Диагоналните елементи на $\mathbf{P}$ съдържат важна информация за средното време на пребиваване в съответното състояние преди напускането му.

Пример 3.1.18 Разглеждаме случайно блуждаене с крайно пространство от състояния X_ξ и следната матрица на преходните вероятности

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ q & 1-p-q & p & 0 \\ 0 & q & 1-p-q & p \\ 0 & 0 & q & 1-q \end{pmatrix}$$

Диагоналните елементи на $\mathbf{P}$ показват, че

$$E\eta_1 = \frac{1}{p},\ E\eta_2 = \frac{1}{p+q},\ E\eta_3 = \frac{1}{p+q},\ E\eta_4 = \frac{1}{q}.$$

Ако $p = 0.2$ и $q = 0.5$ намерете вероятностите Виж (22) и (24).

а) $P(\xi(3) = j|\xi(0) = i),\ i, j = 1, 2, 3, 4;$

б) $P(\xi(7) = j|\xi(0) = i),\ i, j = 1, 2, 3, 4;$

в) $P(\xi(21) = j|\xi(0) = i),\ i, j = 1, 2, 3, 4;$

г) $P(\xi(28) = j|\xi(0) = i),\ i, j = 1, 2, 3, 4.$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0.702 & 0.234 & 0.056 & 0.008 \\ 0.585 & 0.257 & 0.114 & 0.044 \\ 0.350 & 0.285 & 0.227 & 0.138 \\ 0.125 & 0.275 & 0.345 & 0.255 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^7 = \begin{pmatrix} 0.6415182 & 0.2435586 & 0.0857912 & 0.0291320 \\ 0.6088965 & 0.2470997 & 0.1019106 & 0.0420932 \\ 0.5361950 & 0.2547765 & 0.1378547 & 0.0711738 \\ 0.4551875 & 0.2630825 & 0.1779345 & 0.1037955 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{21} = \begin{pmatrix} 0.6161986 & 0.2462595 & 0.09830706 & 0.03923484 \\ 0.6156487 & 0.2463175 & 0.09857894 & 0.03945480 \\ 0.6144191 & 0.2464474 & 0.09918689 & 0.03994664 \\ 0.6130444 & 0.2465925 & 0.09986660 & 0.04049654 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{28} = \begin{pmatrix} 0.6158201 & 0.2462994 & 0.09849419 & 0.03938623 \\ 0.6157486 & 0.2463070 & 0.09852955 & 0.03941484 \\ 0.6155887 & 0.2463239 & 0.09860862 & 0.03947880 \\ 0.6154099 & 0.2463428 & 0.09869701 & 0.03955032 \end{pmatrix}$$

д.) Ако експериментът започва с начални вероятности

$$\overrightarrow{p}(0) = (0.5,\ 0.3,\ 0.1,\ 0, 1)$$

пресметнете $\overrightarrow{p}(3)$, $\overrightarrow{p}(7)$, $\overrightarrow{p}(21)$, $\overrightarrow{p}(28)$.

Решение:

$$\overrightarrow{p}(3) = \overrightarrow{p}(0).\mathbf{P}^3 = (0.574,\ 0.2501,\ 0.1194,\ 0.0565)$$

$$\overrightarrow{p}(7) = \overrightarrow{p}(0).\mathbf{P}^7 = (0.6025663,\ 0.2476951,\ 0.1050477,\ 0.04469089)$$

$$\overrightarrow{p}(21) = \overrightarrow{p}(0).\mathbf{P}^{21} = (0.6155403,\ 0.246329,\ 0.09863256,\ 0.03949818)$$

$$\overrightarrow{p}(28) = \overrightarrow{p}(0).\mathbf{P}^{28} = (0.6157345,\ 0.2463085,\ 0.09853652,\ 0.03942048)$$

Ако $\overrightarrow{p}(0) = (0.6157634,\ 0.2463054,\ 0.09852222,\ 0.03940891)$, то

$$\overrightarrow{p}(1) = \overrightarrow{p}(0).\mathbf{P} = (0.6157634,\ 0.2463054,\ 0.09852222,\ 0.03940891).$$

Дефиниция 3.1.19 Ако системата $\overrightarrow{\pi} = \overrightarrow{\pi}.\mathbf{P}$ (т.е.$\overrightarrow{\pi}(1 - \mathbf{P}) = 0$) има решение $\overrightarrow{\pi}$ такова, че

1. $\pi_j \geq 0$, за всяко $j \in X_\xi$;
2. $$\sum_{j \in X_\xi} \pi_j = 1$$

$\overrightarrow{\pi}$ се нарича инвариантно или стационарно (steady-state) разпределение за ξ и за системата се казва, че е в инвариантно или стационарно (steady-state) състояние.

Важно

1. Ако $\overrightarrow{p}(0) = \overrightarrow{\pi}$ то

$$\overrightarrow{p}(n) = \overrightarrow{\pi}.\mathbf{P}^n = \overrightarrow{\pi}.\mathbf{P}^{n-1} = ... = \overrightarrow{\pi}$$

и началното разпределение не се изменя във времето.

2. Ако веригата има краен брой състояния и $\overrightarrow{p}(0) = \overrightarrow{\pi}$ е стационарно разпределение, то векторите $(\xi(k), \xi(k+1), ..., \xi(k+m))$ и $(\xi(0), \xi(1), ..., \xi(m))$ съвпадат по разпределение, т.е. тази Марковска верига е стационарен процес.

Дефиниция 3.1.20 Нека ξ е хомогенна Марковска верига. Ако за всяко $i \in X_\xi$ и за всяко $j \in X_\xi$ съществуват

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi(n) = j|\xi(0) = i) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\xi(n) = j) = \pi_j^*$$

и

$$\sum_{j\in X_\xi} \pi_j^* = 1$$

$\overrightarrow{\pi}^*$ се нарича гранично разпределение за ξ.

Всяка Марковска верига ξ ли има еднозначно определено стационарно разпределение?

Ако ξ има еднозначно определено стационарно разпределение, то винаги ли съвпада с граничното?

Теорема 3.1.21 Ако ξ е хомогенна Марковска верига с краен брой състояния и съществува $r \in \mathbb{N}$ такова, че елементите на $P^{(r)}$ са строго позитивни, тогава съществува еднозначно определен вектор $\overrightarrow{\pi}$ с $\pi_j > 0, \forall j \in X_\xi$ такъв, че

1. $$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\xi(n) = j) = \pi_j, \forall i \in X_\xi\ \forall j \in X_\xi$$

2. $$\sum_{j\in X_\xi} \pi_j = 1.$$

3. $\overrightarrow{\pi} = \overrightarrow{\pi}.\mathbf{P}.$

1. Граничното разпределение (ако съществува) е винаги инвариантно.

2. Инвариантното разпределение не е задължително да е единствено, например, когато $\mathbf{P} = \mathbf{I}$.

Има ли аналогични резултати за стационарна Марковска верига

с повече от краен брой състояния?

Можем ли да приложим подобни резултати за част от състоянията?

Оценяване на матрицата на преходните вероятности на хомогенна Марковска верига ξ.

От Закона за големите числа

$$P(\xi(1) = j | \xi(0) = i) = \lim_{n \to \infty} \frac{N_{n;ij}}{N_{n;i}},$$

където
$N_{n;ij}$ е броят на преходите от състояние i в състояние j за една стъпка, преди n-тата стъпка.
$N_{n;i}$ е продължителността на престой в състояние i, преди n-тата стъпка.

Пример 3.1.21 Разглеждаме траекторията на хомогенна Марковска верига ξ с $X_\xi = \{0, 1, 2\}$ и следното поведение

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
state	0	1	2	0	0	1	2	2	0	1	2	1
N	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
state	1	2	2	0	1	0	2	0	2	1	1	1
N	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
state	2	1	2	2	1	0	1	2	1	1	2	0

	$\xi(n) = 0$	$\xi(n) = 1$	$\xi(n) = 2$	Total
$\xi(n-1) = 0$	1	5	2	8
$\xi(n-1) = 1$	2	4	8	14
$\xi(n-1) = 2$	5	5	3	13

Тогава $\mathbf{P} =$

	$\xi(n) = 0$	$\xi(n) = 1$	$\xi(n) = 2$	Total
$\xi(n-1) = 0$	$1/8$	$5/8$	$2/8$	1
$\xi(n-1) = 1$	$1/7$	$2/7$	$4/7$	1
$\xi(n-1) = 2$	$5/13$	$5/13$	$3/13$	1

3.2 Класификация на състоянията.

Разглеждаме Мерковска верига с дискретно време.

Дефиниция 3.2.1 Състоянието i е свързано със състоянието j или още се казва, че състоянието j е достъпно от състоянието i ако за някое $n \in T$, $p_{ij}^{(n)} > 0$; т.е. възможно е след известен брой стъпки да се стигне от състояние i до състояние j. Накратко $i \to j$.

Ако j също е достъпно от състояние i, се казва, че те са взаимно свързани, $(i \leftrightarrow j)$.

Релацията $\leftrightarrow$ е релация на еквивалентност, т.е.

- тя е рефлексивна $i \leftrightarrow i$
- симетрична, т.е. ако $i \leftrightarrow j$, то $j \leftrightarrow i$ и
- танзитивна, т.е. ако $i \leftrightarrow j$ и $j \leftrightarrow k$ то $i \leftrightarrow k$.

Ето защо тази релация разделя множеството X_ξ, от състояния на Марковската верига на класове на еквивалентност.

Дефиниция 3.2.2 Множеството от взаимно свързани състояния е наречено **неприводимо**.

Пример 3.2.3 Разглеждаме Марковска верига ξ с $X_\xi = \{0, 1, 2, 3\}$ и матрица на преходните вероятности

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Тази Марковска верига(МВ) е неприводима т.к. всички нейни състояния са взаимно свързани. Казва се, че нейното пространство на състоянията е прост взаимно свързан клас. Възможно е от всяко състояние да се достигне до всяко. Има път от състояние 0 до състояние 1. Има път от състояние 1 до 0. Преходите $0 \to 2$, се състоят от няколко стъпки $0 \to 1 \to 2$. Преходът $2 \to 0$, се състои от следните стъпки $2 \to 1 \to 0$. Аналогично получаваме, че $0 \leftrightarrow 3$, $1 \leftrightarrow 2$, $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 3$. Намерете стационарно разпределение на тази верига.

Дефиниция 3.2.4 Една МВ, която се състои само от взаимно свързани състояния се нарича **неприводима или неразложима**.

Твърдение 3.2.5 Ако една хомогенна МВ е неразложима, то съществува единствено стационарно разпределение (и ако съществува гранично разпределение то съвпада със стационарното).

Дефиниция 3.2.6 Една МВ с краен брой състояния се нарича **регулярна** ако някоя степен на матрицата на преходните вероятности има само положителни елементи.

Твърдение 3.2.7 Ако една МВ с краен брой състояния е регулярна, то тя е неразложима.

Обратното не винаги е вярно.

Пример 3.2.8 Разглеждаме жена, която винаги ходи от дома си до работата си, от работата си до най-близкия магазин и от най-близкия магазин до дома си и други разходки няма. Това нейно поведение може да бъде описано с МВ ξ с матрица на преходните вероятности

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{3.n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n \in \{0, 1, ...\}. \tag{25}$$

Тогава

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^{3.n+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}^3 = \mathbf{P}^{3.n+3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и отново. Следователно ξ е неразложима, но не е регулярна. МВ с такава матрица на преходните вероятности няма гранично разпределение. Намерете стационарно разпределение на тази верига.

Пример 3.2.9 Разглеждаме ВМ ξ с $X_\xi = \{1, 2, 3, 4\}$ и матрица на преходните вероятности

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тази МВ не е неразложима т.к. например състоянията 1 и 4 не са взаимно свързани. Има път от състояние 1 до състояние 4. Преходите $1 \to 2$, $2 \to 3$ и $3 \to 4$ са възможни, но няма път от 4 към 1. Тогава тази матрица не е регулярна. Пространството от състояния X_ξ се състои от два класа на еквивалентност $\{1,\ 2,\ 3\}$ и $\{4\}$. Намерете стационарно и граничното разпределение на тази верига.

Дефиниция 3.2.10 Състоянието i се нарича поглъщащо ако, няма състояние, което да е достижимо от него.

Състояние 4 в предния пример е поглъщащо.

Дефиниция 3.2.11 Нека ξ е ВМ, която има поне едно поглъщащо състояние. ξ се нарича поглъщаща или абсорбираща ако е възможно да се отиде от всяко неабсорбиращо състояние до поне едно абсорбиращо състояние след краен брой стъпки.

Дефиниция 3.2.12 Състоянието i се нарича минимално ако е достижимо от всяко друго състояние.

Дефиниция 3.2.13 Множеството от състояния C се нарича затворено ако никое състояние извън C не може да бъде достигнато от никое състояние, влизащо в C.

- Това, че C е затворено, не изключва възможността C да бъде достигнато от други състояния.
- Ако някое състояние образува затворено множество, то е поглъщащо състояние.

Дефиниция 3.2.14 Най-малкото затворено множество, съдържащо състоянието i се нарича затворена обвивка на i и се означава с $[i]$.

Ако i е минимален елемент, то $[i]$ се състои само от минимални елементи.

Дефиниция 3.2.15 Класът на еквивалентност C се нарича минимален (затворен) ако не може да се излезе от него.

Дефиниция 3.2.16 Класът на еквивалентност C се нарича максимален ако не може да се влезе от него.

- Ако си представим, че всяко състояние е източник на информация, която се предава по връзките на графа, то максималните състояния са източници на информация, а минималните - крайни приемници.

Пример 3.2.17 Разглеждаме хомогенна МВ ξ с

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Намерете стационарно и граничното разпределение на тази верига ако съществуват. Кои състояния са минимални? Кои множества от състояния са затворени? Намерете минималните и максималните класове и затворените обвивки на всички състояния.

Пример 3.2.18 Разглеждаме хомогенна МВ ξ с

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Намерете стационарно и граничното разпределение на тази верига ако съществуват. Кои състояния са минимални? Кои множества от състояния са затворени? Намерете минималните и максималните класове и затворените обвивки на всички състояния.

Пример 3.2.19 Разглеждаме хомогенна МВ ξ с

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Намерете стационарно и граничното разпределение на тази верига ако съществуват. Кои състояния са минимални? Кои множества от състояния са затворени? Намерете минималните и максималните класове и затворените обвивки на всички състояния.

Класификацията на състоянията позволява да получим така наречената

канонична форма на матрицата на преходните вероятности.

Преномерираме състоянията така, че минималните класове на еквивалентност да предхождат всички останали състояния. След това се изброяват множествата от първо ниво относно минималните (т.е. тези, от които за един скок може да се попадне само в минимално множество) или в състояние от същото множество. После идва ред на множествата от второ ниво спрямо минималните и т.н. Тази номерация гарантира, че от дадено състояние можем да преминем само в другите състояния от същия клас или в състояния на класове с по-малък номер.

Пример 3.2.20 Разглеждаме хомогенна МВ ξ с

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 5/6 \end{pmatrix}.$$

Кои състояния са минимални? Кои множества от състояния са затворени? Намерете минималните и максималните класове и затворените обвивки на всички състояния. Приведете в каноничен вид тази матрица.

Определяме класовете: $\{4,5\}$, $\{2\}$, $\{1,3\}$. Тогава каноничният вид на матрицата е

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0. \end{pmatrix}.$$

Пример 3.2.21 Разглеждаме хомогенна МВ ξ с

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Кои състояния са минимални? Кои множества от състояния са затворени? Намерете минималните и максималните класове и затворените обвивки на всички състояния. Приведете в каноничен вид тази матрица.

Определяме класовете: $\{5\}$, $\{3,8\}$, $\{1,9,4\}$, $\{2\}$, $\{7,6\}$. Тогава каноничният вид на матрицата е

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

При такава форма на матрицата на преходните вероятности по диагонала имаме матриците на преходните вероятности на различните класове на еквивалентност. Като най-горе в ляво са поглъщащите състояния, ако има такива. Над тези матрици имаме нули. Така всяка степен на матрицата на преходните вероятности ще има същия вид. Това показва, че даден клас на еквивалентност може да се изучава отделно от другите. По тази причина основно се изследват МВ, които имат един клас на еквивалентност, т.е. неразложимите вериги.

Нека $i \in X_\xi$,

$$\tau_i = inf\{n \in \mathbb{N} : \xi(n) = i | \xi(0) = i\}$$

бъде момента на първото завръщане в състояние i (момент на достигане),

$$f_{ii}^{(n)} := P(\tau_i = n | \xi(0) = i) = P(\xi(n) = i, \xi(s) \neq i, s = 1, 2, ..., n-1 | \xi(0) = i)$$

бъде вероятността, че процесът ще се върне в състояние i за първи път след n стъпки. Тогава случайните величини, които показват броя на промените на състоянията на веригата, между $k-1$ - то и k-тото връщане на веригата в състояние i, да ги означим с $\tau_i^{(k)}$, $k = 1, 2, ...$ няма да зависят от k ще бъдат н.е.р. и

$$P(\tau_i^{(k)} = n) = f_{ii}^{(n)}.$$

Вероятностите $f_{ii}^{(n)}$ могат да бъдат определени последователно от рекурентната зависимост, описана в следната теорема.

Теорема 3.2.22

$$f_{ii}^{(0)} := 0,\ p_{ii}^{(0)} := 1,\ p_{ii}^{(n)} = \sum_{s=0}^{n} f_{ii}^{(s)} p_{ii}^{(n-s)},\ n = 1, 2, \ldots$$

Означаваме с

$$f_i = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_i = n | \xi(0) = i) = P(\tau_i < \infty | \xi(0) = i) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$$

вероятността, че ако процеса започне от състояние i той ще се върне в i след няколко стъпки.

Дефиниция 3.2.23 Състоянието i се нарича преходно ако, $f_i < 1$, т.е. при условие, че процесът започне от състояние i, има ненулва вероятност, че той никога няма да се върне в i. Иначе, ако $f_i = 1$, тогава състоянието i се нарича рекурентно, възвратно (или повтарящо се).

Рекурентните състояния имат крайни моменти на достигане с вероятност 1.

Ако състоянието i е рекурентно, то вероятността, че никога няма да се върнем в i е 0. Процесът, който започва в i ще се връща в i много, много пъти и процесът ще започва от началото. Следователно средният брой на завръщания в състояние i е безкраен. Виж (25).

Пример 3.2.24 Разглеждаме МВ ξ с матрица на преходните вероятности

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Тогава

$$\mathbf{P}^{20} = \begin{pmatrix} 0.666667 & 0.333333 \\ 0.666666 & 0.333334 \end{pmatrix}.$$

Регулярна ли е? Разложима ли е? Има ли стационарно разпределение? Има ли гранично разпределение? Рекурентна ли е?

От друга страна ако i е преходно, тогава тръгвайки от състояние i вероятността да се върнем в i е $f_i < 1$ и с положителна вероятност $1 - f_i$ ние никога няма да се върнем в i.

Нека ν_{ii} е броят на завръщанията в състояние i.

Тогава започвайки от преходно състояние i, процесът ще бъде в i точно n пъти с вероятност

$$P(\nu_{ii} = n | \xi(0) = i) = f_i^{n-1}(1 - f_i), \; n = 1, 2, \ldots.$$

Ето защо ако състоянието i е преходно, то $\nu_{ii} - 1 \sim Geom(1 - f_i)$. Следователно средният брой на завръщанията в състояние i е

$$M_i := M_{ii} := E(\nu_{ii} | \xi(0) = i) = \frac{1}{1 - f_i}.$$

Поради факта, че

$$(\nu_{ii}|\xi(0)=i)=\sum_{n=1}^{\infty} I\{\xi(n)=i|\xi(0)=i\}$$

получаваме, че

$$M_{ii}:=E(\nu_{ii}|\xi(0)=i)=\sum_{n=1}^{\infty} EI\{\xi(n)=i|\xi(0)=i\}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi(n)=i|\xi(0)=i)=\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}.$$

Твърдение 3.2.25

1. Едно състояние i е рекурентно тогава и само тогава, когато

$$M_{ii} := E(\nu_{ii}|\xi(0) = i) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty.$$

2. Едно състояние i е преходно тогава и само тогава, когато

$$M_{ii} := E(\nu_{ii}|\xi(0) = i) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = (1 - f_i)^{-1} < \infty.$$

Твърдение 3.2.26 В хомогенна МВ с краен брой състояния поне едно състояние е рекурентно.

Твърдение 3.2.27

1. Ако състоянието i е рекурентно и $i \leftrightarrow j$, то j също е рекурентно.
2. Ако състоянието i е преходно и $i \leftrightarrow j$, то j също е преходно.

Предното твърдение влече следния резултат.

Твърдение 3.2.28 В неразложима, хомогенна МВ с краен брой състояния всички състояния са рекурентни.

Дефиниция 3.2.29 Една МВ се нарича **преходна**, ако има поне едно преходно състояние и ако всичките й възвратни състояния са поглъщащи.

Разглеждаме една МВ с r възвратни класа. Тогава свойствата на веригата могат да бъдат изведени от свойствата на една преходна верига и r възвратни вериги поради следните съображения:

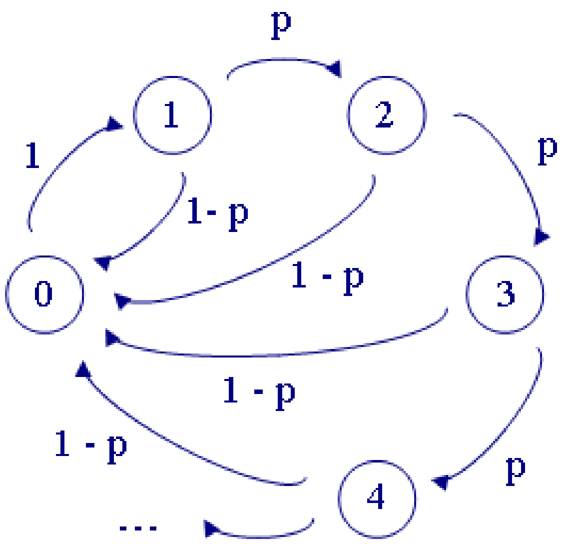
- Ако МВ започва от възвратно състояние преминаването от състояние в състояние се ограничава в рамките на един клас на еквивалентност. Свойствата на веригата съвпадат с тези на МВ с матрица на преходните вероятности както в този клас на еквивалентност.

- Ако МВ започва от преходно състояние нейното поведение докато е в множеството на преходните състояния ще бъде същото както на нова МВ, получена от изходната след превръщане на възвратните й състояния в поглъщащи.

Поради това основно се изучават отделно само възвратни или само преходни МВ-ги.

Пример 3.2.30 Играч играе следната игра. Ако той няма никакъв капитал в следващата игра той печели 1 Euro. Тогава той отново играе една игра и ако той спечели, получава 1 Euro. Ако той загуби, губи всичката печалба до момента. Нека p е вероятността на събитието "Играчът печели 1 игра" и нека $\xi(n)$ да бъде печалбата на играча след n-тата игра. Намерете матрицата на преходните вероятности на ξ и проверете дали ξ е рекурентна.

Пример 3.2.30 Играч играе следната игра. Ако той няма никакъв капитал в следващата игра той печели 1 Euro. Тогава той отново играе една игра и ако той спечели, получава 1 Euro. Ако той загуби, губи всичката печалба до момента. Нека p е вероятността на събитието "Играчът печели 1 игра" и нека $\xi(n)$ да бъде печалбата на играча след n-тата игра. Намерете матрицата на преходните вероятности на ξ и проверете дали ξ е рекурентна.



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ 1-p & 0 & 0 & p & 0 & \dots \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Веригата е неприводима и

$f_0 = 1-p+p(1-p)+p^2.(1-p)+\ldots = 1.$

ето защо тя е рекурентна.

Среден брой моменти от време, когато ξ е в преходното състояние j, при условие, че веригата започва от преходното състояние i.

Разглеждаме МВ с крайно пространство от състояния

$$X_\xi = \{0, 1, ..., k, k+1, ..., s\}, \ k < \infty$$

и множество от преходни състояния

$$Tr_\xi = \{0, 1, ..., k\}.$$

Нека ν_{ij} бъде броят от моменти от време, когато ξ е в състояние j, при условие, че веригата започва от начално преходно състояние

$$M_{ij} := E\{\nu_{ij} | \xi(0) = i\}$$

Свойства:

- $$M_{ii} = \frac{1}{1 - f_i}$$

- $$M_{ij} := E\{\nu_{ij} | \xi(0) = i\} = E \sum_{n=1}^{\infty} I\{\xi(n) = j | \xi(0) = i\} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$$

- $M_{ij} := M_{jj}.f_{ij}.$

Доказателство: $M_{ij} := E\{\nu_{ij}|\xi(0)=i\} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E\{\nu_{ij}|\xi(n)=j, \xi(n-1)\neq j, ...\xi(1)\neq j, \xi(1)\neq j, \xi(0)=i\}.$$

$$P(\xi(n)=j, \xi(n-1)\neq j, ...\xi(1)\neq j, \xi(1)\neq j|\xi(0)=i) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E\{\nu_{ij}|\xi(n)=j\}P(\xi(n)=j, \xi(n-1)\neq j, ...\xi(1)\neq j, \xi(1)\neq j|\xi(0)=i)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} M_{jj}P(\xi(n)=j, \xi(n-1)\neq j, ...\xi(1)\neq j, \xi(1)\neq j|\xi(0)=i) =$$

$$= M_{jj}\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi(n)=j, \xi(n-1)\neq j, ...\xi(1)\neq j, \xi(1)\neq j|\xi(0)=i) =$$

$$= M_{jj}\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = M_{jj}.f_{ij}.$$

Казаното до тук е вярно за всеки $i, j \in X_\xi$. За практиката са интересни случаите, когато $i, j \in Tr_\xi$.

Дефиниция 3.2.31 Означаваме матрицата от стойностите на M_{ij},$i, j \in Tr_\xi$ с

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} & \dots & M_{0k} \\ M_{10} & M_{11} & \dots & M_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{k0} & M_{k1} & \dots & M_{kk} \end{pmatrix}..$$

Матрицата $\mathbf{M}$ се нарича фундаментална матрица на веригата.

- $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{Tr})^{\leftarrow}$, където $\mathbf{P}_{Tr}$ е ограничението на матрицата на преходните вероятности само върху множеството от преходни състояния.

Доказателство: От формулата за двойното математическо очакване и уравнението на Колмогоров-Чепмен за $i, j \in Tr_\xi$ получаваме, че

$$M_{ij} := I\{i = j\} + \sum_{r=1}^{s} E\nu_{rj}.P(\xi(1) = r|\xi(0) = i) =$$

$$= I\{i = j\} + \sum_{r=1}^{k} E\nu_{rj}.P(\xi(1) = r|\xi(0) = i). \quad i, j \in Tr_\xi.$$

Последното равенство се дължи на факта, че преходът от рекурентно към преходно състояние е невъзможен.
Горните уравнения имат следния матричен запис

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + \mathbf{P}_{Tr} * \mathbf{M}$$

където $\mathbf{I}$ е единичната матрица с $k \times k$ размерност.

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{Tr}) * \mathbf{M} = \mathbf{I}$$

- Сумата във всеки от редовете на фундаменталната матрица $\mathbf{M}$ е средното време на престой в множеството на преходните състояния, ако тя тръгва от съответното състояние, което е номер на колоната.

За някои безкрайни вериги е възможно тази сума да е безкрайност.

Пример 3.2.32 Разглеждаме МВ ξ с $X_\xi = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и матрица на преходните вероятности

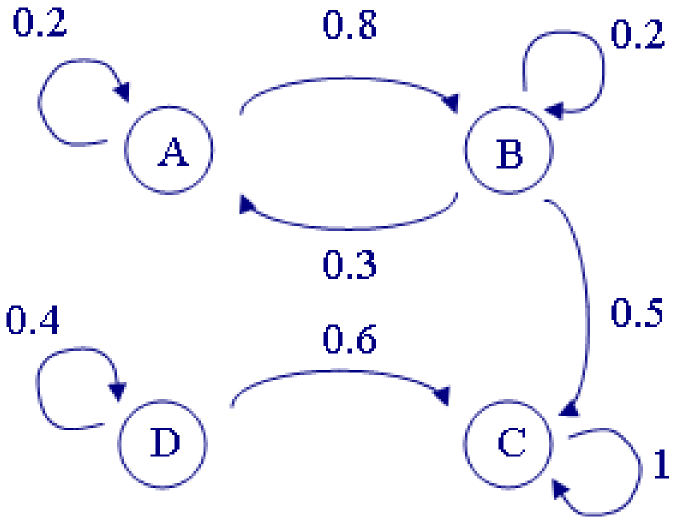
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Намерете класовете на еквивалентност и рекурентните състояния. Намерете стационарните разпределения. Намерете фундаменталната матрица на веригата и средните времена на престой в множеството на преходните състояния.

Как да намерим граничното разпределение, ако то не е стационарно?

Стандартна форма на поглъщаща МВ

Пример 3.2.33 Нека ξ е хомогенна МВ със следната диаграма на преходните вероятности



Нека 0 = A, 1 = B, 2 = C и 3 = D. Получаваме следната матрица на преходните вероятности

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

X_ξ има 4 състояния, ето защо съществуват $4! = 24$ начина да подредим матрицата на преходните вероятности. Кой от тези начини е стандартен?

Стандартна форма на матрица на преходните вероятности на поглъщаща МВ

Казваме, че матрица на преходните вероятности на поглъщаща МВ е в стандартна форма ако номерата на поглъщащите състояния са по-малки от номерата на всички непоглъщащи състояния.

В нашия пример само състоянието C е поглъщащо и ето защо неговия номер е 0. Една от стандартните форми на ξ е $1 = A$, $2 = B$, $3 = D$.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Обикновено стандартната форма на матрицата на преходните вероятности на поглъщаща МВ е разделена на 4 подматрици.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{Absorbing} & \text{Non-absorbing} \\
\begin{array}{l} \text{Absorbing} \\ \\ \text{Non-absorbing} \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\left(\begin{array}{c:c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{R} & \mathbf{P}_{\mathbf{Tr}} \end{array}\right)}
\end{array}
$$

В Пример 3.2.33 имаме Виж (30)

$$
\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_{\mathbf{Tr}} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}
$$

Гранично разпределение на поглъщаща МВ.

Дефиниция 3.2.34 Ако $\mathbf{P}$ е стандартна форма на матрицата на преходните вероятности на поглъщащата МВ ξ, матрицата

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{Tr})^{-1}$$

се нарича фундаментална за ξ.

Твърдение 3.2.35 Ако $\mathbf{P}$ е стандартна форма на матрицата на преходните вероятности на поглъщащата МВ ξ с фундаментална матрица $\mathbf{M}$, тогава граничната матрица е

$$\overline{\mathbf{P}} := \lim_{n\to\infty} P^n = \begin{array}{r} \\ \text{Absorbing} \\ \text{Non-absorbing} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Absorbing} & \text{Non-absorbing} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{MR} & \mathbf{0} \end{array}\right) \end{array}$$

Разглеждаме Пример 3.2.33. Виж (30)

Фундаменталната матрица е

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{Tr})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.8 & 0 \\ -0.3 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0.75 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}$$

Тогава граничната матрица е

$$\overline{\mathbf{P}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Absorbing} & \text{Non-absorbing} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Absorbing} \\ \text{Non-absorbing} \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{MR} & \mathbf{0} \end{array}\right] \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Забележете, че за да имаме различни числа в граничната матрица трябва да имаме повече от едно поглъщащо състояние.

Пример 3.2.36 Разглеждаме хомогенна МВ с

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Приведете матрицата на преходните вероятности в стандартна форма.
- Намерете фундаменталната матрица.
- Намерете граничната матрица.
- Намерете средното аритметично на броя стъпки, които са ни нужни за да отидем от съответното непоглъщащо състояние в някое поглъщащо състояние.

Дори, когато моментът на достигане $\tau_i|\xi(0) = i$ е краен с вероятност 1 (т.е. ако състоянието i е рекурентно), той не е задължително да има крайно математическо очакване.

Дефиниция 3.2.37 Средно време на завръщане в състояние i е очакваното време на завръщане $\mu_i := E(\tau_i|\xi(0) = i)$:

1. състояние i е положително рекурентно (или ненулево устойчиво) ако $\mu_i < \infty$, т.е. $\frac{1}{\mu_i} > 0$;

2. иначе състоянието i е нулево рекурентно (или нулево устойчиво). В този случай $\frac{1}{\mu_i} = 0$.

Твърдение 3.2.38 Ако ξ е неразложима и рекурентна МВ и съществува $j \in X_\xi$ такова, че $\frac{1}{\mu_i} > 0$, тогава за всяко $j \in X_\xi$, $\frac{1}{\mu_i} > 0$.

Дефиниция 3.2.39 Ако една МВ ξ е неразложима и рекурентна и съществува поне едно $j \in X_\xi$ такова, че $\frac{1}{\mu_i} > 0$, тогава тя се нарича положително рекурентна.

Пример 3.2.40 Проверете дали веригата, описана в Пример 3.2.30 е положително рекурентна. Виж (29).

Пример 3.2.40 Проверете дали веригата, описана в Пример 3.2.30 е положително рекурентна. Виж (29).

Веригата е неразложима. Освен това

$$P(\tau_0 = k|\xi(0) = 0) = p^{k-2}.(1-p), \quad k = 2, 3, \ldots.$$

Ето защо $(\tau_0|\xi(0) = 0) - 1 \sim Geom(1-p)$, върху 1, 2,...

$$E(\tau_0 - 1|\xi(0) = 0) = \frac{1}{1-p}$$

и

$$E(\tau_0|\xi(0) = 0) = \frac{2-p}{1-p} < \infty.$$

Дефиниция 3.2.41 Период k на състояние i е най-големият общ делител $(d(i))$ на степените n такива, че $p_{ii}^{(n)} > 0$.

Дефиниция 3.2.42 Ако периодът $k = 1$ състоянието е непериодично, иначе то се нарича периодично.

Твърдение 3.2.43 Ако $i \leftrightarrow j$, то $d(i) = d(j)$.

Периодите на състоянията в рамките на един клас на еквивалентност съвпадат и те се наричат период на класа.

Твърдение 3.2.44 Разглеждаме хомогенна МВ ξ. Ако съществува $i \in X_\xi$ такова, че $p_{ii} > 0$ то ξ е апериодично.

Определете дали Марковската верига, разглеждана в пример 3.2.8 (Виж (25)) е периодична.

Определете дали Марковската верига, разглеждана в пример 3.2.30 е периодична.

Теорема 3.2.45 В неразложима МВ с период d всички състояния могат да бъдат разделени на d класа - $K_0, K_1, ..., K_{d-1}$ така, че един скок на веригата от състояние от класа K_s привежда системата в състояние от класа K_{s+1} (тук ако $s = d$ приемаме, че $K_{s+1} = K_0$). Ако разгледаме системата само в моментите $d, 2d, 3d, ...$ ще получим нова МВ, чиито състояния образуват затворен клас. Така изходната верига се разлага на d затворени класа, всеки от които е неразложим и непериодичен.

- Матрицата на преходните вероятности на периодична МВ, с период d, с подходящо преномериране на състоянията може да се представи във вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & P_{0,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{1,2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & P_{d-2,d-1} \\ P_{d-1,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При това всяка кратна на периода степен на тази матрица има същия вид.

Дефиниция 3.2.46 Ако една МВ ξ е апериодична и положително рекурентна тя се нарича строго ергодична.

3.3. Фундаментална гранична теорема.

Теорема 3.3.1 Нека P е матрицата на преходните вероятности за регулярната МВ ξ с крайно множество от състояния, тогава съществува $\overrightarrow{\pi}$, $\pi_j > 0, \forall j \in X_\xi$ такъв, че

1. $$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \forall i \in X_\xi,\ \forall j \in X_\xi$$
2. $$\sum_{j\in X_\xi} \pi_j = 1.$$
3. $\overrightarrow{\pi} = \overrightarrow{\pi}.\mathbf{P}.$

Нека да означим средното време на връщане в състояние i с

$$\mu_i := E(\tau_i|\xi(0) = i) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(\tau_i = n|\xi(0) = i) = \sum_{n=1}^{\infty} nf_{ii}^{(n)}.$$

Основна ергодична теорема 3.3.2 Ако състоянието i е възвратно непериодично, то

1. $$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}, \forall i \in X_\xi,\ \forall j \in X_\xi$$

2. $$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i}, \forall i \in X_\xi$$

Ако $\mu_j = \infty$ считаме, че $\frac{1}{\mu_j} = 0$.

Теорема 3.3.3 Ако състоянието $i \in X_\xi$ е възвратно и периодично с период d, то

1. $$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i},$$

2. $$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd+a)} = 0, \forall a = 1, 2, ..., d-1.$$

Ако $\mu_i = \infty$ считаме, че $\frac{1}{\mu_i} = 0$.

- Ако $i \in X_\xi$ е силно ергодично $\mu_i > 0$ и средното време на връщане в i е крайно.

- Ако състоянията $i \in X_\xi$ и $j \in X_\xi$ принадлежат на един и същ клас на еквивалентност, те са от еднакъв тип: или едновременно преходни, или нулеви възвратни, или периодични с еднакъв период или силно ергодични. В този случай $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$ и $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}$ са едновременно 0 или положителни числа.
- Всяка неразложима, непериодична крайна МВ е силно ергодична.
- Всяка крайна МВ има поне едно възвратно състояние.

Теорема 3.3.4 Нека ξ е строго ергодичната МВ (апериодична и положително рекурентна), тогава съществува единствен вектор $\overrightarrow{\pi}$ с $\pi_j > 0, \forall j \in X_\xi$ такъв, че

1. $$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P(\xi(n) = j) = \pi_j, \forall i \in X_\xi \; and \; \forall j \in X_\xi,$$

2. $$\sum_{j\in X_\xi} \pi_j = 1,$$

3. $\overrightarrow{\pi} = \overrightarrow{\pi}.\mathbf{P}$,

4. $$\pi_j = \frac{1}{\mu_j}.$$

Пример 3.3.5 Разглеждаме клиент, който посещава само 2 магазина A или B и чиито дневни навици се описват със следните правила:

- Той посещава точно 1 от теза два магазина на ден.
- Ако той е посетил A днес, утре той ще посети A с вероятност 0.6 и B с вероятност 0.4.
- Ако той е посетил B днес, утре той ще посети A с вероятност 0.2 и B с вероятност 0.8.

Означаваме с
0 = "клиентът е в магазин A" и с
1 = "клиентът е в магазин B".
Намерете граничното разпределение.

От условието на задачата

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Уравненията $\pi_0 + \pi_1 = 1$ и $\overrightarrow{\pi}.\mathbf{P} = \overrightarrow{\pi}$ са еквивалентни на

$$\begin{array}{ccccc} \pi_0 & + & \pi_1 & = & 1 \\ 0.6\pi_0 & + & 0.2\pi_1 & = & \pi_0 \\ 0.4\pi_0 & + & 0.8\pi_1 & = & \pi_1 \end{array} .$$

Граничните вероятности са $\overrightarrow{\pi} = (1/3, 2/3)$.

Основната гранична теорема е в сила за всеки клас на еквивалентност. Другите компоненти се заместват с нула и се получават няколко инвариантни разпределения.

Теорема 3.3.6 Нека ξ е неразложима, непериодична МВ, съставена само от преходни състояния или само от възвратни нулеви състояния. Тогава веригата няма стационарно разпределение и

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \forall i \in X_\xi\ ,\ \forall j \in X_\xi.$$

4. Гаусови процеси. Винеров процес.

4.1 Гаусов процес.

Защо Гаусовите процеси са полезни?

- Гаусовите процеси често се срещат на практика, например във финансите и физиката (Brownian motion).
- Всички техни крайномерни разпределения са Гаусови и поради това са добре изучени.
- Могат да бъдат напълно описани със своята средна функция (mean function) и ковариационна или корелационна матрица на крайномерните разпределения.
- Оценките на всички техни характеристики са добре изследвани в научната литература.
- Явните форми на разпределенията на оценките обикновено са известни и много удобни, например, за получаване на доверителни интервали.
- Това са основните процеси, които се използват в регресионния анализ и при анализа на динамични редове.

Нека да разгледаме вероятностно пространство с непрекъсната отдясно филтрация $\mathcal{S} = (\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

Дефиниция 4.1.1 Един случаен процес $\{\xi(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$, дефиниран върху $\mathcal{S}$ се нарича Гаусов процес (Gaussian process) ако за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$ случайният вектор

$$\overrightarrow{\xi_n} = (\xi(t_1), \xi(t_2), ..., \xi(t_n))$$

има Гаусово разпределение.

Дефиниция 4.1.2 Един случаен процес $\{\xi(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$, дефиниран върху $\mathcal{S}$ се нарича Гаусов процес (Gaussian process) ако за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$ всички линейни комбинации на случайния вектор $\overrightarrow{\xi_n} = (\xi(t_1), \xi(t_2), ..., \xi(t_n))$ са Нормално (Гаусово) разпределени.

Твърдение 4.1.3 За всяка функция $\overrightarrow{a}(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ и неотрицателно определено ядро $\gamma(t, s) : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ съществува един единствен по отношение на крайномерните разпределения Гаусов процес, със средна функция $\overrightarrow{a}(t)$ и авто-ковариационна функция (ACVF) $\gamma(t, s)$. Неговата плътност на разпределение е

$$P_{\overrightarrow{\xi_n}}(\overrightarrow{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\gamma|^{-\frac{1}{2}}.exp\{-\frac{1}{2}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})'.\gamma^{-1}.(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})\},$$

където $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\overrightarrow{a} = (E\xi(t_1), ..., E\xi(t_n))$ и

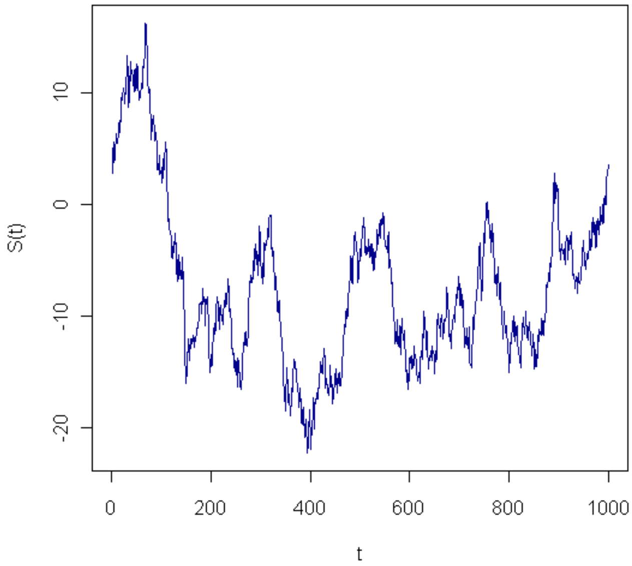
$$\gamma_{ij} = \gamma(t_i, t_j) = E\{[\xi_n(t_i) - E\xi_n(t_i)][\xi_n(t_j) - E\xi_n(t_j)]\}, \quad i, j = 1, 2, ..., n,$$

т.е. γ е ковариационната матрица на вектора $\overrightarrow{\xi_n}$. Виж (6).

Вече знаем, че силната стационарност на процеса влече неговата слаба стационарност. Обратното не винаги е вярно. При Гаусови процеси, обаче, те са еквивалентни.

4.2 Винеров процес

Дефиниция 4.2.1 Един случаен процес $\{W(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$, дефиниран върху $\mathcal{S}$ се нарича Винеров процес ако



1. $W(0) = 0$, почти сигурно,
2. $EW(t) = 0$, за всяко $t \geq 0$,
3. за всяко $0 < s$, $0 < t$,
$$\gamma(s,t) = \sigma^2 min(s,t),$$
4. W е Гаусов процес.

Да отбележим, че Винеровият процес не е стационарен процес.

Дефиниция 4.2.2 Ако $\sigma = 1$ говорим за стандартен Винеров процес.

Дефиниция 4.2.3 Един случаен процес $\{W(t, \cdot)\}_{t\geq 0}$, дефиниран върху $\mathcal{S}$ се нарича Винеров процес ако

1. $W(0) = 0$, почти сигурно,
2. W има независими адитивни нараствания, т.е. завсяко $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, случайните величини

$$W(t_1),\ W(t_2) - W(t_1),\ W(t_3) - W(t_2),\ \ldots,\ W(t_n) - W(t_{n-1})$$

   са независими в съвкупност,
3. За всяко $0 \leq s < t$,

$$W(t) - W(s) \sim N(0; \sigma^2(t - s)).$$

Дефиниция 4.2.4 Един случаен процес $\{W(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$, дефиниран върху $\mathcal{S}$ се нарича Винеров процес ако

1. $W(0) = 0$, почти сигурно,
2. W има стационарни и независими адитивни нараствания,
3. За всяко $0 < t$, $W(t) \sim N(0; \sigma^2 t)$.

Свойства: Нека W е Винеров процес, тогава за всяко $0 \leq s < t$

1. $E(W(t) - W(s)) = 0$,
2. $E(W(t) - W(s))^2 = \sigma^2(t - s)$,
3. $Var(W(t) - W(s))^2 = \sigma^2(t - s)$,
4. $E(W(t) - W(s))^{2n} = 1.3...(2n - 1)[\sigma^2(t - s)]^n$,
5. $\gamma(s,t) = \sigma^2 min(s,t)$.

6.

$$corr(W(s),W(t)) = \frac{min(s,t)}{\sqrt{st}} = \sqrt{\frac{min(s,t)}{max(s,t)}}.$$

7. За всяко $0 \le s < t$

$$(W(s)|W(t) = y) \sim N(\frac{s}{t}y; \sigma^2\frac{s}{t}(t-s)). \tag{31}$$

Доказателство:

$$f_{W(s)}(x|W(t) = y) = \frac{f_{W(s),W(t)}(x,y)}{f_{W(t)}(y)} =$$

$$= \frac{f_{W(t)}(y|W(s) = x)f_{W(s)}(x)}{f_{W(t)}(y)} = \frac{f_{W(t)-W(s)}(y-x|W(s) = x)f_{W(s)}(x)}{f_{W(t)}(y)} =$$

$$= \frac{f_{W(t)-W(s)}(y-x)f_{W(s)}(x)}{f_{W(t)}(y)} = \frac{f_{W(t-s)}(y-x)f_{W(s)}(x)}{f_{W(t)}(y)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\frac{s}{t}(t-s)}} exp\{-\frac{(x+\frac{s}{t}y)^2}{2\pi\sigma^2\frac{s}{t}(t-s)}\}.$$

Пример 4.2.5 Нека $S(t)$ е цената на дадена акция в момента t. Означаваме логаритмичната възвръщаемост в рамките на 1 час с

$$X(t) = \log\ S(t) - log\ S(t-1) = \log \frac{S(t)}{S(t-1)}.$$

Предполагаме, че X е Винеров процес с дисперсия σ^2. Наблюдаваме X за 1 час.

a.) Ако логаритмичната възвръщаемост е σ в средата на този час, намерете вероятността на събитието тя да бъде положителна в края на този час, т.е. намерете

$$P(X(1) > 0 | X(\frac{1}{2}) = \sigma).$$

b.) Ако логаритмичната възвръщаемост е σ в края на часа, намерете вероятността на събитието тя да бъде положителна в средата на този час, т.е.

$$P(X(\frac{1}{2}) > 0 | X(1) = \sigma).$$

a.) $P(X(1) > 0|X(0.5) = \sigma) = P(X(1) - X(0.5) > -\sigma|X(0.5) = \sigma) =$

$$= P(X(1) - X(0.5) > -\sigma) = P(X(0.5) > -\sigma) =$$

$$= P(\frac{\sqrt{2}}{\sigma}X(0.5) > -\sqrt{2}) = \Phi(\sqrt{2}) = 0.92.$$

Тук използвахме, че $X(0.5) \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2})$, т.е. $\frac{\sqrt{2}}{\sigma}X(0.5) \sim N(0, 1)$.

b.) Означаваме с $\eta := (X(0.5)|X(1) = \sigma)$. От Свойство 7, приложено за $s = 0.5$ и $t = 1$ получаваме

$$\eta \sim N(0.5\sigma; 0.25\sigma^2).$$

Тогава Виж(31).

$$P(X(0.5) > 0|X(1) = \sigma) = P(\eta > 0) = P(\eta - 0.5\sigma > -0.5\sigma) =$$

$$= P(\frac{\eta - 0.5\sigma}{0.5\sigma} > -\frac{0.5\sigma}{0.5\sigma}) = P(\frac{\eta - 0.5.\sigma}{0.5\sigma} > -1) = \Phi(1) = 0.84.$$

8. W е марковски процес.

9. W е стохастично непрекъснат процес.

10. W е мартингал с непрекъснат параметър относно естествената филтрация.

11. W е $\frac{1}{2}$ себеподобен процес, т.е. за всяко $\alpha > 0$ случайните процеси

$$\{W(\alpha t),\ t \geq 0\} = \{\sqrt{\alpha}W(t),\ t \geq 0\}$$

съвпадат в смисъл на крайномерни разпределния.

12. W е симетричен, т.е. за всяко $s \geq 0$ и $t \geq 0$

$$W(t) - W(s) = W(s) - W(t),$$

по разпределение.

Забележка: Винеровият процес не е стохастично диференцируем. Виж (11). Нека без ограничение на общността да приемем, че $\sigma^2 = 1$. Тогава диференчното частно

$$\frac{W(t+h)-W(t)}{h} \sim N(0; \frac{1}{|h|})$$

е разходящо по разпределение, при $h \to 0$, тъй като за всяко $\varepsilon > 0$

$$P(\frac{W(t+h)-W(t)}{h} > \varepsilon) = \frac{\sqrt{|h|}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\frac{x^2|h|}{2}} dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\varepsilon\sqrt{|h|}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \to \frac{2}{2} = 1, \quad h \to 0,$$

където в предпоследното равенство сме направили смяната $y = x\sqrt{|h|}$.

13. Ако $\tau_a = inf\{t > 0 : W(t) \geq a\}$, $a > 0$, то

$$P(\tau_a \leq t) = P(\sup_{s\in[0,t]} W(s) \geq a) = 2P(W(t) \geq a).$$

Ако $\sigma = 1$, то при $a > 0$, $P_{\sup_{s\in[0,t]} W(s)}(a) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{2t}}$ и $P_{\sup_{s\in[0,t]} W(s)}(x) = 0$, иначе. Последното разпределение се нарича половин нормално (half normal).

Доказателство: От формулата за пълната вероятност, при $a > 0$
$P(W(t) \geq a) =$

$$= P(W(t) \geq a|\tau_a \leq t)P(\tau_a \leq t) + P(W(t) \geq a|\tau_a > t)P(\tau_a > t).$$

От симетрията на W,

$$P(W(t) \geq a) = \frac{1}{2}P(\tau_a \leq t) + 0P(\tau_a > t).$$

$$P(\tau_a \leq t) = P(\sup_{s \in [0,t]} W(s) \geq a) = 2P(W(t) \geq a) = 2[1 - P(W(t) \geq a)] =$$

$$= 2\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx\right].$$

Полагаме $x = y\sqrt{t}$ и получаваме

$$= 2\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy\right].$$

Диференцираме по a и получаваме, че при $a > 0$,

$$P_{\sup_{s \in [0,t]} W(s)}(a) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{2t}},$$

и $P_{\sup_{s \in [0,t]} W(s)}(x) = 0$, иначе.

14. W е квадратично интегруем, т.е. за всяко разбиване $s = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$ на $[s, t]$, такова че

$$\max_{1 \le k \le n} |t_k - t_{k-1}| < 2^{-n},$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (W(t_k) - W(t_{k-1}))^2 = E(W(t) - W(s))^2 = \sigma^2(t - s),$$

почти сигурно.

Доказателство: Разглеждаме $\varepsilon > 0$. От н-вото на Чебишов и от независимите адитивни нараствания на Винеровия процес

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\sum_{k=1}^{n}(W(t_k)-W(t_{k-1}))^2-\sigma^2(t-s)|\geq\varepsilon)\leq$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Var\sum_{k=1}^{n}(W(t_k)-W(t_{k-1}))^2}{\varepsilon^2}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{Var(W(t_k)-W(t_{k-1}))^2}{\varepsilon^2}\leq$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{E(W(t_k)-W(t_{k-1}))^4-(E(W(t_k)-W(t_{k-1}))^2)^2}{\varepsilon^2}\leq$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3(\sigma^2(t_k-t_{k-1}))^2-(\sigma^2(t_k-t_{k-1}))^2}{\varepsilon^2}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\sigma^4(t_k-t_{k-1})^2}{\varepsilon^2}\leq$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\max_{k=1,\dots,n}(t_k-t_{k-1})2\sigma^4\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})}{\varepsilon^2}\leq$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n+1}\frac{\sigma^4(t-s)}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^4(t-s)}{\varepsilon^2}<\infty.$$

15. W има почти сигурно неограничена вариация, т.е. за всяко разбиване

$$s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$$

на $[s, t]$, такова че

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} |t_k - t_{k-1}| = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |W(t_k) - W(t_{k-1})| = \infty,$$

почти сигурно.

Доказателство: Допускаме, че съществува константа $c < \infty$, такава, че почти сигурно

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|W(t_k)-W(t_{k-1})| = c.$$

От теоремата за монотонната сходимост и формулата за м.о. на половин нормално(half normal) разпределение бихме имали

$$\lim_{n\to\infty} E\sum_{k=1}^{n}|W(t_k)-W(t_{k-1})| = c.$$

$$E\sum_{k=1}^{n}|W(t_k)-W(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n}E|W(t_k)-W(t_{k-1})| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}E|W(t_k-t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{2\sigma^2(t_k-t_{k-1})}{\pi}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi}}\sum_{k=1}^{n}\frac{(t_k-t_{k-1})}{\sqrt{t_k-t_{k-1}}} \geq \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi}}\frac{t-s}{\max_{k=1,2,\ldots,n}(t_k-t_{k-1})} \to \infty, \quad n\to\infty.$$

Дефиниция 4.2.6 Един случаен процес $\{W(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$, дефиниран върху $\mathcal{S}$ се нарича **Винеров процес** ако

1. $W(0) = 0$, почти сигурно,
2. за всяко $t \geq 0$, $EW(t) = 0$,
3. W има стационарни и независими адитивни нараствания,
4. W има почти сигурно непрекъснати траектории.

За всяко $t > 0$, $f_{W(t)}(x)$ удовлетворява уравнението на дифузия. То е решение на проблема на Коши

$$\frac{\sigma^2}{2}.\frac{\partial^2 f_{W(t)}(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial f_{W(t)}(x)}{\partial x},$$

$$f_{W(0)}(x) = I\{x = 0\},$$

т.е.

$$f_{W(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказателство: За всяко $h > 0$, $f_{W(t+h)}(x) =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{W(t+h)-W(t)+W(t)}(x|W(t+h) - W(t) = y) f_{W(t+h)-W(t)}(y)dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{y+W(t)}(x|W(t+h) - W(t) = y) f_{W(t+h)-W(t)}(y)dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{y+W(t)}(x) f_{W(t+h)-W(t)}(y)dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{W(t)}(x-y) f_{W(t+h)-W(t)}(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{W(t)}(x-y) f_{W(h)}(y)dy.$$

От развитието в ред на Тейлор на $f_{W(t)}(x)$, разглеждана като функция на x, в точката $x-y$ и около x,

$$f_{W(t)}(x-y) = f_{W(t)}(x) - \frac{\partial f_{W(t)}(x)}{\partial x} y + \frac{\partial^2 f_{W(t)}(x)}{\partial^2 x} \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$

Ето защо $f_{W(t+h)}(x) =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \{ f_{W(t)}(x) - \frac{\partial f_{W(t)}(x)}{\partial x} y + \frac{\partial^2 f_{W(t)}(x)}{\partial^2 x} \frac{y^2}{2} + o(y^2) \} f_{W(h)}(y) dy =$$

$$= f_{W(t)}(x) - \frac{\partial f_{W(t)}(x)}{\partial x} EW(h) + \frac{\partial^2 f_{W(t)}(x)}{\partial^2 x} \frac{E[W(h)^2]}{2} + E[o(W(h)^2)] =$$

$$= f_{W(t)}(x) + \frac{\partial^2 f_{W(t)}(x)}{\partial^2 x} \frac{\sigma^2 h}{2} + E[o(W(h)^2)] =$$

$$= f_{W(t)}(x) + \frac{\partial^2 f_{W(t)}(x)}{\partial^2 x} \frac{\sigma^2 h}{2} + E\left[\frac{o(W(h)^2)}{W(h)^2} W(h)^2 \right].$$

$$= f_{W(t)}(x) + \frac{\partial^2 f_{W(t)}(x)}{\partial^2 x} \frac{\sigma^2 h}{2} + o_2(h) \sigma^2 h.$$

Така

$$f_{W(t+h)}(x) = f_{W(t)}(x) + \frac{\partial^2 f_{W(t)}(x)}{\partial^2 x}\frac{\sigma^2 h}{2} + o_2(h)\sigma^2 h.$$

От друга страна, от развитието в ред на Тейлор на $f_{W(t+h)}(x)$ като функция на времето

$$f_{W(t+h)}(x) = f_{W(t)}(x) + \frac{\partial f_{W(t)}(x)}{\partial t}h + o(h).$$

От тези равенства получаваме

$$f_{W(t)}(x) + \frac{\partial^2 f_{W(t)}(x)}{\partial^2 x}\frac{\sigma^2 h}{2} = f_{W(t)}(x) + \frac{\partial f_{W(t)}(x)}{\partial t}h + o_3(h).$$

Като разделим на h и устремим $h \to 0$ получаваме желания резултат.

Теорема на Донскер(Donsker). Нека $\xi_1, \xi_2, \ldots$ са н.е.р. сл. величини,

$$E\xi_1 = 0, \quad Var\xi_1 = \sigma^2 < \infty$$

и $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$. Тогава

$$X_n(t) := \frac{S_{[nt]} + (nt - [nt])\xi_{[nt]+1}}{\sigma\sqrt{n}} \to W(t), \quad n \to \infty$$

в смисъл на сходимост на крайномерните разпределения.

Забележка: Много характеристики на случайното блуждаене се схождат слабо към съответните характеристики на Винеровия процес, например:

$$\max_{k=1,2,\ldots,[nt]} X_n(\frac{k}{n}) \to \sup_{s\in[0;t]} W(s).$$

4.3 Свързани с Гаусовите процеси

Дефиниция 4.3.1 Случаен процес $\{W_\mu(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$, който е такъв, че

1. $W_\mu(0) = 0$, почти сигурно,
2. W_μ има стационарни и независими адитивни нараствания,
3. за всяко $t > 0$, $W_\mu(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ се нарича Винеров процес с тренд (дрифт) $\mu \in \mathbb{R}$.

Дефиниция 4.3.2 Случаен процес $\{W_\mu(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$, който е такъв, че

1. $W_\mu(0) = 0$, почти сигурно,
2. W_μ има независими адитивни нараствания,
3. за всяко $0 \leq s < t$, $W_\mu(t) - W_\mu(s) \sim N(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$ се нарича Винеров процес с тренд (дрифт) $\mu \in \mathbb{R}$.

Дефиниция 4.3.3 Случаен процес $\{W_\mu(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$, дефиниран като

$$W_\mu(t) = \mu t + \sigma W(t),$$

където W е стандартен Винеров процес се нарича **Винеров процес с тренд (дрифт)** $\mu \in \mathbb{R}$.

Пример 4.3.4 Процесът на логаритмуваната цена на опциите (the logarithmic option price process) в модела на Блек-Шолс (Black-Scholes) обикновено се приема, че е Винеров процес с дрифт.

Дефиниция 4.3.5 Случаен процес $\{\widehat{W}(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$, дефиниран като

$$\widehat{W}(t) = e^{\mu t + \sigma W(t)}$$

където W е стандартен Винеров процес се нарича **геометрично Брауново движение с постоянен дрифт $\mu \in \mathbb{R}$ и волатилност $\sigma > 0$.**

Пример 4.3.6 Нека $\{S(t,\cdot), t \geq 0\}$ е процесът, описващ цената на дадена опция (виж модела на Black-Scholes). Обикновено се приема, че той е геометрично Брауново движение с констанен дрифт и волатилност. Причината за това е следната. Нека фиксираме $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$. Разглеждаме относителното изменение на тази цена на опцията, т.е.

$$\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Ако тези сл. величини са н.е.р., тогава техните логаритми

$$\log\ S(t_i) - \log\ S(t_{i-1}), \quad i = 1, 2, ..., n$$

са също н.е.р. сл. величини, т.е. разумно е да приемем, че процесът $\log\ S(t)$ има хомогенни и независими адитивни нараствания. Нещо повече, от принципа за онвариантност на Донскер (Donsker invariance principle) получаваме, че

$$\log\ S(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\log\ S(\frac{ti}{n}) - \log\ S(\frac{(i-1)t}{n})) + \log\ S(0)$$

е Винеров проц. с тренд, т.е. $S(t)$ е геометрично Брауново движение.

$$\mu = E \log\ S(1), \quad \sigma^2 = Var \log\ S(1).$$

Защо е полезно разпределението на $S(t)$?

Ако u е началният капитал на инвеститора и F = "Фалит преди момента t_0", тогава

$$P(F) = P(\sup_{y \in [0;t_0]} S(y) > u) = P(\sup_{y \in [0;t_0]} \log\ S(y) > \log\ u) =$$

$$= P(\sup_{y \in [0;t_0]} W_\mu(y) > \log\ u) = P(\mu t_0 + \sigma \sup_{y \in [0;t_0]} W(y) > \log\ u) =$$

$$= P(\sup_{y \in [0;t_0]} W(y) > \frac{\log\ u - \mu t_0}{\sigma}) = 2P(W(t_0) > \frac{\log\ u - \mu t_0}{\sigma}).$$

Дефиниция 4.3.7 Случайният процес $\{W^0(t,\cdot)\}_{t\in[0,1]}$, дефиниран като

$$W^0(t) = W(t) - tW(1),$$

където W е стандартен Винеров процес се нарича **Браунов мост**.

Свойства:

1. $W^0(0) = W^0(1) = 0$, почти сигурно.
2. За всяко $t \geq 0$, $EW^0(t) = 0$.
3. За всяко $t \geq 0$, $Var\ W^0(t) = t(1-t)$.
4. За всяко $0 \leq s < t$, $Var\ (W^0(t) - W^0(s)) = s(1-t)$.
5. За всяко $0 \leq s < t$, $\gamma(s,t) = (t-s)(1-t+s)$.
6. W^0 има независими адитивни нараствания.
7. W^0 има хомогенни адитивни нараствания.
8. W^0 е L_2 непрекъснат.

Дефиниция 4.3.8 Случайният процес $\{W^0(t,\cdot)\}_{t\in[0,1]}$, дефиниран като

$$W^0(t) = (W(t)|W(1) = 0),$$

където W е стандартен Винеров процес се нарича Браунов мост.

Твърдение 4.3.9 Нека $\xi_1, \xi_2, \ldots$ са н.е.р. сл. величини и

$$F_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{I\{\xi_k < x\}}{n},$$

да бъде тяхната емпирична ф.р. Тогава,

$$\sqrt{n}.(F_n(t) - t) \to W^0(t),$$

в смисъл на крайномерните разпределения.

Дефиниция 4.3.10 Нека $a : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ и $\sigma : [0, \infty) \to [0, \infty)$, са непрекъснати функции, такива че $a(0) = 0$ и $\sigma(0) = 0$. Случайният процес $\{W^*(t, \cdot)\}_{t \geq 0}$, който е такъв че

1. $W^*(0) = 0$, почти сигурно,
2. W^* има независими адитивни нараствания,
3. W^* има почти сигурно непрекъснати траектории,
4. за всяко $0 \leq s < t$, $W^*(t) - W^*(s) \sim N(a(t) - a(s), \sigma^2(t) - \sigma^2(s))$ се нарича обощен Винеров процес.

5. Марковски вериги с непрекъснат параметър.

5.1. Дефиниция. Преходни вероятности. Уравнения на Колмогоров-Чепмен.

Дефиниция 5.1.1 Случайният процес $\{\xi(t,\omega), t \geq 0, \omega \in \Omega\}$ се нарича Марковска верига с непрекъснат параметър ако за всяко $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$ и $i_1, i_2, ..., i_n \in X_\xi$

$$P(\xi(t_n) = i_n | \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}, ..., \xi(t_1) = i_1) = P(\xi(t_n) = i_n | \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}).$$

Последното равенство се нарича Марковско свойство.

1. Всеки стохастичен процес с непрекъснат параметър и хомогенни и независими адитивни нараствания е МВ.

2. Ако $\xi \sim HPP(\lambda)$, $\lambda > 0$ тогава той е МВ с непрекъснат параметър и $X_\xi = 0, 1, ...$.

Дефиниция 5.1.2 МВ $\{\xi(t,\omega),\ t \geq 0,\ \omega \in \Omega\}$ се нарича хомогенна по време ако за всяко $t, s > 0$ и $i, j \in X_\xi$

$$P_{ij}(t) := P(\xi(t+s) = j | \xi(s) = i)$$

и ако $j \notin X_\xi$, то $P_{ij}(t) = 0$.

Свойства:

1. За всяко $i, j \in X_\xi$, $t > 0$, $P_{ij}(t) \geq 0$.

2. За всяко $i \in X_\xi$, $t > 0$,

$$\sum_{j \in X_\xi} P_{ij}(t) = 1.$$

3. Ако $\xi \sim HPP(\lambda)$, $\lambda > 0$ то за всяко $s, t > 0$ и $i, j \in X_\xi$,

$$P_{ij}(t) = P(\xi(t+s) = j | \xi(s) = i) = P(\xi(t+s) - \xi(s) = j - i) =$$

$$= P(\xi(t) = j - i) = I\{j \geq i\}.\frac{(\lambda.t)^{j-i}.e^{-\lambda.t}}{(j-i)!}.$$

Дефиниция 5.1.3 За хомогенна МВ, функцията

$$P_{ij}(t) = P(\xi(t+s) = j | \xi(s) = i)$$

се нарича функция на преходните вероятности от състояние i в състояние j в момента t. Съответната матрица $\mathbf{P}(t) = (P_{ij}(t))_{i,j \in X_\xi}$ се нарича Матрица на преходните вероятности в момента t.

Уравнения на Колмогоров-Чепмен.

$$P_{ij}(s+t) = \sum_{k \in X_\xi} P_{ik}(s).P_{kj}(t), \quad s > 0,\ t > 0.$$

Дефиниция 5.1.4 Вероятностите $P_i(t) = P(\xi(t) = i),\ \ i \in X_\xi$ образуват разпределение на процеса в момента t.

Дефиниция 5.1.5 Вероятностите $P_i(0) = P(\xi(0) = i),\ \ i \in X_\xi$ образуват начално разпределение на процеса.

Свойства: 1.

$$P(\xi(t) = i) = \sum_{j \in X_\xi} P(\xi(t) = i | \xi(0) = j).P(\xi(0) = j) = \sum_{j \in X_\xi} P_{ij}(t).P_j(0).$$

2. Ако $\xi \sim HPP(\lambda)$, $\lambda > 0$ то $P(\xi(0) = 0) = 1$.

Дефиниция 5.1.6 Матрицата $\mathbf{P}(t) = (P_{ij}(t))_{i,j\in X}$, $t \geq 0$ се нарича стандартна ако

1. $P_{ij}(t) \geq 0$, $i, j \in X$, $t \geq 0$;
2. за всяко $i \in X$, $\sum_{j\in X} P_{ij}(t) = 1$, $t > 0$;
3. $$P_{ij}(s+t) = \sum_{k\in X} P_{ik}(s).P_{kj}(t), \quad s > 0,\ t > 0.$$
4. $\mathbf{P}(t)$ е непрекъсната по $t > 0$.
5. $$\lim_{t\to 0} P_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & , \ i = j \\ 0 & , \ i \neq j \end{cases}.$$

Твърдение 5.1.7 Нека $\{\xi(t,\omega),\ t \geq 0,\ \omega \in \Omega\}$ е хомогенна МВ. ξ е сепарабелен случаен процес тогава и само тогава, когато нейната матрица на преходните вероятности е стандартна.

Твърдение 5.1.8 Ако $\{\xi(t,\omega),\ t \geq 0,\ \omega \in \Omega\}$ е хомгенна МВ със стандартна матрица на преходните вероятности, то

1. за всяко $i \in X_\xi$ съществуват

$$P'_{ii}(0) = \lim_{t \searrow 0} \frac{P_{ii}(t) - 1}{t},$$

   но могат да бъдат равни и на безкрайност.

2. За всяко $i \neq j$, $i, j \in X_\xi$ съществуват

$$P'_{ij}(0) = \lim_{t \searrow 0} \frac{P_{ij}(t)}{t} < \infty.$$

3. Нека означим с $q_{ij} = P'_{ij}(0)$, $i, j \in X_\xi$ and $q_i = -q_{ii}$. Тогава

$$\sum_{j \in X_\xi; j \neq i} q_{ij} = -q_{ii} = q_i, \ \ i.e. \sum_{j \in X_\xi} q_{ij} = 0. \tag{32}$$

За да докажем последните вероятности нека да наблюдаваме смисъла на числата q_{ij}, $i \neq j \in X_\xi$. Разглеждаме

$$\lim_{h \searrow 0; h>0} P(\xi(h) = j | \xi(0) = i, \xi(h) \neq i) = \lim_{h \searrow 0; h>0} \frac{P(\xi(h) = j, \xi(0) = i)}{P(\xi(h) \neq i, \xi(0) = i)} =$$

$$= \lim_{h \searrow 0; h>0} \frac{P(\xi(h) = j | \xi(0) = i).P(\xi(0) = i)}{P(\xi(h) \neq i | \xi(0) = i).P(\xi(0) = i)} =$$

$$= \lim_{h \searrow 0; h>0} \frac{P_{ij}(h)}{1 - P(\xi(h) = i | \xi(0) = i)} = \lim_{h \searrow 0; h>0} \frac{P_{ij}(h)}{1 - P_{ii}(h)} =$$

$$= \lim_{h \searrow 0; h>0} \frac{\frac{P_{ij}(h)}{h}}{\frac{1-P_{ii}(h)}{h}} = \frac{q_{ij}}{-q_{ii}} = \frac{q_{ij}}{q_i}.$$

Дефиниция 5.1.9 Нека $\{\xi(t, \omega),\ t \geq 0,\ \omega \in \Omega\}$ е хомогенна МВ със стандартна матрица на преходните вероятности. Наричаме

$$\lim_{h \searrow 0; h>0} P(\xi(h) = j | \xi(0) = i, \xi(h) \neq i) = \frac{q_{ij}}{q_i} = \frac{q_{ij}}{\sum_{j \in X_\xi; j \neq i} q_{ij}} =: p_{ij} \quad (33)$$

мигновени преходни вероятности от състояние i в състояние j.

Дефиниция 5.1.10 Нека $\{\xi(t,\omega),\ t \geq 0,\ \omega \in \Omega\}$ е хомогенна МВ със стандартна матрица на преходните вероятности $\mathbf{P}$. Матрицата

$$\mathbf{Q} := \mathbf{P}'(0) = \lim_{t \searrow 0} \frac{\mathbf{P}(t) - 1}{t},$$

се нарича инфинитезимална матрица или генератор на ξ.

Твърдение 5.1.11 Ако матрицата $\mathbf{Q}$ е такава, че $-q_{ii} < \infty$, $i \in X_\xi$ и (32) е удовлетворено, то има две възможности:

1. Съществува еднозначно определена хомогенна МВ с инфинитезимална матрица $\mathbf{Q}$.

2. Съществуват безкрайно много хомогенни МВ с инфинитезимална матрица $\mathbf{Q}$.

За МВ с краен брой състояния, диагоналните елементи $-q_i$, $i \in X_\xi$ са крайни (т.к. q_{ij} са крайни).

Дефиниция 5.1.12 Ако $q_i = \infty$, състоянието i се нарича мигновено.

Когато процесът влезе в i, той незабавно напуска i.

Дефиниция 5.1.13 Ако $q_i \in [0, \infty)$, състоянието i се нарича немигновено или устойчиво.

Ние ще разглеждаме само МВ с немигновени състояния.

Дефиниция 5.1.14 Ако $q_i = 0$, то $q_{ij} = 0, j \in X_\xi$ и състоянието i се нарича абсорбиращо. В този случай $p_{ii}(t) = 1$ и $p_{ij}(t) = 0$, за всяко $j \in X_\xi$, $j \neq i$ и $t > 0$.

Благодаря за вниманието!

Appendix 1.

$$ts.plot(AirPassengers) \tag{34}$$

Box, G. E. P., Jenkins, G. M. and Reinsel, G. C. (1976) Time Series Analysis, Forecasting and Control. Third Edition. Holden-Day. Series G.

Appendix 1. Daily Log Returns on Siemens Share Price

$$siemens\{evir\} \tag{35}$$

data(siemens)
plot(siemens, xlab="", type = "h", col = "darkblue", lwd=1)

(36)

```
y=rnorm(1000, mean=0,sd=16)
plot(y,t="l",col="darkblue", lwd=1,xlab="t",ylab="Y(t)")
```

```
eps=rnorm(1000, mean=0, sd=16)
i=1
s=1
for (i in 1:1000)
s[i]=sum(eps[1:i])
plot(s, t="l", col="darkblue", lwd=1, xlab="t", ylab="Y(t)")

acf(y, type = "correlation", lag.max = 200)
acf(y, type = "partial", lag.max = 200)
```

$$AR(1) \tag{38}$$

```
phi= -0.8; mu=0; sigma=2
eps= rnorm(1000, mean=0, sd=sigma)
y=0; i=1; y[1]=0;
for (i in 2:1000)
y[i]<- mu + phi*y[i-1] + eps[i]
plot(y, xlab="t", main = "y(t) = -0.8*y(t - 1) + eps(t)",
                        type = "l", col = "darkblue")
acf(y, type = "correlation", lag.max = 50,
              main = "y(t) = -0.8*y(t - 1) + eps(t)")
acf(y, type = "partial", lag.max = 50,
              main = "y(t) = -0.8*y(t - 1) + eps(t)")
```

$$MA(1) \tag{39}$$

```
theta=0.99;  sigma=2
eps=rnorm(1000, mean=0, sd=sigma)
y =0; i=1; y[1]=0
for (i in 2:1000) y[i]= theta*eps[i-1] + eps[i]
plot(y, xlab="t", main = "MA(1), theta = 0,99, sigma = 2",
                    type = "l", col = "darkblue", lwd=1)
acf(y[2:1000], type = "correlation", lag.max = 50,
                    main = " theta = 0,99, sigma = 2")
acf(y[2:1000], type = "partial", lag.max = 50,
                    main = "theta = 0,99,  sigma = 2")
```

$$library\{rgl\} \tag{40}$$

```
r=mat.or.vec(100,100)
for (i in 1:100)
 for (j in 1:100)
 r[i,j]=sqrt(min(i,j)/max(i,j))
x = seq(1, 100, length= 100)
y = x
open3d()
persp3d(x, y, r, col = "red", xlab = "X", ylab = "Y", zlab = "rho")

movie3d(spin3d(axis = c(0,0,1), rpm = 10), duration=6,  type = "png")

for(i in 1:10){
  snapshot3d(file=paste("spin-",i,".png"))
  view3d(theta=theta[i])
 }
```

(41)

```
phi=-0.5
h=0:20
rho=phi^h
plot(rho, xlab="h", main = "phi = -0,5",  type = "h",
                                    col = "darkblue", lwd=1)
```

```
phi=0.3
eps= rnorm(300, mean=0, sd=2)
y =0; i=1; y[1]=eps[1]
for (i in 2:300)
y[i]= phi*y[i-1] + eps[i]
plot(y, xlab="t", main = "phi = 0,3, sigma = 2", type = "l",
                                    col = "darkblue", lwd=1)
acf(y, type = "correlation", lag.max = 50, main = "phi = 0,3, sigma = 2")
acf(y, type = "partial", lag.max = 50, main = "phi = 0,3, sigma = 2")
```

```
P=mat.or.vec(3, 3)
P[1,1]=0.6; P[1,2]=0.2; P[1,3]=0.2
P[2,1]=0.7; P[2,2]=0.2; P[2,3]=0.1
P[3,1]=0.8; P[3,2]=0.2; P[3,3]=0
P      [,1] [,2] [,3]
[1,]   0.6   0.2   0.2
[2,]   0.7   0.2   0.1
[3,]   0.8   0.2   0.0
p0=c(0.5, 0.4, 0.1)
p1=p0%*%P  [,1] [,2] [,3]
[1,]       0.66  0.2 0.14
p2=p1%*%P  [,1] [,2]  [,3]
    [1,] 0.648   0.2   0.152
p3=p2%*%P  [,1]  [,2]   [,3]
    [1,] 0.6504  0.2  0.1496
```

```
P2=P%*%P
      [,1] [,2] [,3]
[1,] 0.66  0.2 0.14
[2,] 0.64  0.2 0.16
[3,] 0.62  0.2 0.18
p2=p0%*%P2
       [,1] [,2]  [,3]
[1,] 0.648  0.2 0.152
P3=P%*%P%*%P
      [,1] [,2] [,3]
[1,] 0.66  0.2 0.14
[2,] 0.64  0.2 0.16
[3,] 0.62  0.2 0.18
p3=p0%*%P3
       [,1]   [,2]   [,3]
[1,] 0.6504  0.2  0.1496
```

```
P3=P%*%P%*%P
[1,] 0.648  0.2 0.152
[2,] 0.652  0.2 0.148
[3,] 0.656  0.2 0.144
p3=p0%*%P3
[1,] 0.6504  0.2  0.1496
P7=P%*%P%*%P%*%P%*%P%*%P%*%P
[1,] 0.6499968  0.2  0.1500032
[2,] 0.6500032  0.2  0.1499968
[3,] 0.6500096  0.2  0.1499904
p7=p0%*%P7
[1,] 0.6500006  0.2  0.1499994
P10=P%*%P%*%P%*%P%*%P%*%P%*%P%*%P%*%P%*%P
[1,] 0.6500000  0.2 0.1500000
[2,] 0.6500000  0.2 0.1500000
[3,] 0.6499999  0.2 0.1500001
p10=p0%*%P10
[1,] 0.65   0.2    0.15
```

Appendix 1. Daily Log Returns on Siemens Share Price

$$siemens\{evir\} \tag{46}$$

```
data(siemens)
plot(siemens, xlab="", type = "h", col = "darkblue", lwd=1)
```

Appendix 2. Population of the United States as a decennial time-series, from 1790 to 2000. It is a data frame that contains couples of data (census year,population in millions).

$$USPop\{car\} \tag{47}$$

ls(USPop)

[1] "population" "year"

plot(USPop$year,USPop$population, xlab="year", ylab="population",
+ type = "l", col = "darkblue", lwd=1)

Source:U.S. Census Bureau

http://www.census-charts.com/Population/pop-us-1790-2000.html, downloaded 1 May 2008.

References:

Fox, J. (2008) Applied Regression Analysis and Generalized Linear Models, Second Edition. Sage.

Appendix 3. The classic Box and Jenkins airline data. Monthly time series of totals of international airline passengers in thousands from 1949 to 1960.

(48)

ts.plot(AirPassengers)

Box, G. E. P., Jenkins, G. M. and Reinsel, G. C. (1976) Time Series Analysis, Forecasting and Control. Third Edition. Holden-Day. Series G.

Appendix 4. Daily daily closing prices of the Dow Jones Index over the period 1996 to 2000.

$$dowjones\{ismev\} \tag{49}$$

```
data(dowjones)
plot(dowjones$Date, dowjones$Index, xlab = "Date", ylab = "Index",
+  type = "l", col = "darkblue", lwd=1)

plot(dowjones$Date[1:1303],
+ log(dowjones$Index[2:1304]/dowjones$Index[1:1303]), xlab = "Date",
+ ylab = "Log relative index",  type = "l", col = "darkblue", lwd=1)
```

Coles, S. G. (2001) An Introduction to Statistical Modelling of Extreme Values. London: Springer.

Appendix 5. Average Monthly Temperatures at Nottingham, 1920-1939.

$$nottem\{datasets\} \tag{50}$$

```
plot(nottem, xlab = "Date", ylab = "Index", type = "l",
+ col = "darkblue", lwd=1)
```

Anderson, O. D. (1976) Time Series Analysis and Forecasting: The Box-Jenkins approach. Butterworths. Series R.

Appendix 6. Measurements of the annual flow of the river Nile at Ashwan 1871-1970.

$$nottem\{datasets\} \tag{51}$$

```
plot(Nile, xlab = "t", ylab = "y(t)", type = "l",
+ col = "darkblue", lwd=1)

m<-mean(Nile)
m
[1] 919.35

lines(m*Nile/Nile, lty = 3, col = "red")
```

References: Balke, N. S. (1993) Detecting level shifts in time series. Journal of Business and Economic Statistics 11, 81-92.

Cobb, G. W. (1978) The problem of the Nile: conditional solution to a change-point problem. Biometrika 65, 243-51.

Appendix 7. Measurements of the annual flow of the river Nile at Ashwan 1871-1970.

$$nottem\{datasets\} \tag{52}$$

```
i<-1

ma<-1

N<-as.numeric(Nile)

plot(Nile[3:100-3], xlab = "t", ylab = "y(t)", type = "l",
+ col = "darkblue", lwd=1)

for (i in 3:100-3)
ma[i-2]<-sum(N[i-2],N[i-1],N[i],N[i+1],N[i+2])/5

lines(ma, lty = 3, col = "red")
```

```
x<-USPop$year
y<-USPop$population
plot(x,y, xlab="year", ylab="population",type = "p",
+ col = "darkblue", lwd=1)
y.lm<-lm(y~1 + I(x))
summary(y.lm)
Residuals:
   Min     1Q  Median     3Q    Max
 -25.25  -20.78 -10.11  19.58  51.42
Coefficients: Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -2.348e+03  1.613e+02  -14.55 4.19e-12 ***
I(x)         1.289e+00  8.508e-02   15.15 2.00e-12 ***
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 25.32 on 20 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9198,     Adjusted R-squared: 0.9158
F-statistic: 229.5 on 1 and 20 DF,  p-value: 2.005e-12
abline(y.lm$coefficients[1],y.lm$coefficients[2],lty = 3, col = "red")
```

$$USPop\{car\} \qquad (54)$$

```
x<-USPop$year
y<-USPop$population
plot(x,y, xlab="year",ylab="population",type = "p",
+ col = "darkblue", lwd=1)
y.lm<-lm(y~1 + I(x) + I(x^2))
summary(y.lm)
Residuals:    Min       1Q      Median      3Q      Max
           -7.5557  -0.4308   0.6051    1.4230  4.6486
Coefficients: Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  2.162e+04  6.389e+02   33.83   <2e-16 ***
I(x)        -2.403e+01  6.749e-01  -35.61   <2e-16 ***
I(x^2)       6.681e-03  1.780e-04   37.52   <2e-16 ***
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 2.997 on 19 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9989,     Adjusted R-squared: 0.9988
F-statistic:  8892 on 2 and 19 DF,  p-value: < 2.2e-16
lines(x,
+y.lm$coefficients[1] + y.lm$coefficients[2]*x + y.lm$coefficients[3]*(x^2),
+ lty = 3, col = "red")
```

```
plot(Nile, xlab = "t", ylab = "y(t)", type = "p",
+ col = "darkblue", lwd=1)
x<-1871:1970
y<-Nile
y.lm<-lm(y~1 + I(x))
summary(y.lm)
Residuals:
    Min       1Q    Median      3Q     Max
 -483.71   -98.17   -23.21   111.40  368.72
Coefficients: Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 6132.1736  1001.7578   6.121 1.92e-08 ***
I(x)          -2.7143     0.5216  -5.204 1.07e-06 ***
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 150.6 on 98 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.2165,     Adjusted R-squared: 0.2085
F-statistic: 27.08 on 1 and 98 DF,  p-value: 1.072e-06
lines(x,y.lm$coefficients[1] + y.lm$coefficients[2]*x,lty = 3, col = "red")
```

```
plot(Nile, xlab = "t", ylab = "y(t)", type = "p",
+ col = "darkblue", lwd=1)
x<-1871:1970
y<-Nile
y.lm<-lm(y~1 + I(x) + I(x^2))
summary(y.lm)
Residuals:    Min      1Q     Median      3Q     Max
          -425.71  -88.17    2.16      80.79  289.67
Coefficients:Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  2.814e+05  6.948e+04   4.050 0.000103 ***
I(x)        -2.894e+02  7.237e+01  -4.000 0.000124 ***
I(x^2)       7.465e-02  1.884e-02   3.962 0.000142 ***
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 140.4 on 97 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.3257,     Adjusted R-squared: 0.3118
F-statistic: 23.42 on 2 and 97 DF,  p-value: 5.018e-09
lines(x,
+y.lm$coefficients[1] + y.lm$coefficients[2]*x + y.lm$coefficients[3]*(x^2),
+lty = 3, col = "red")
```

$$USPop\{car\} \tag{57}$$

```
x<-USPop$year
y<-USPop$population
y.lm<-lm(y~1 + I(x))
plot(x,y.lm$residuals, xlab="year",ylab="residuals",
+type = "p",col = "darkblue", lwd=1)
acf(y.lm$residuals,  lag.max = 72,
+main = "ACF of the residuals of the linear model of US population" )
acf(y.lm$residuals, lag.max = 72,type="partial",
+ main = "PACF of the residuals of the linear model of US population" )
```

$$USPop\{car\} \tag{58}$$

```
x<-USPop$year
y<-USPop$population
y.lm<-lm(y~1 + I(x) + I(x^2))
plot(x,y.lm$residuals, xlab="year",ylab="residuals",
+type = "p",col = "darkblue", lwd=1)
acf(y.lm$residuals,  lag.max = 72,
+main = "ACF of the residuals of the quadratic model of US population" )
acf(y.lm$residuals, lag.max = 72,type="partial",
+ main = "PACF of the residuals of the quadratic model of US population" )
```

- linear model
  durbinWatsonTest(y.lm$residuals)
  [1] 0.1291033
- quadratic model
  durbinWatsonTest(y.lm$residuals)
  [1] 1.21695

Fox, J. (2008) Applied Regression Analysis and Generalized Linear Models, Second Edition. Sage.

```
data(dowjones)
x<-dowjones$Date
y <-dowjones$Index
y.lm<-lm(y~1 + I(x))
summary(y.lm)
Residuals:   Min       1Q      Median     3Q      Max
          -1388.43  -278.96   -29.16   322.45  1239.05
Coefficients:  Estimate   Std. Error    t    value Pr(>|t|)
(Intercept)   -3.069e+04  2.617e+02  -117.3   <2e-16 ***
I(x)           4.377e-05  2.939e-07   149.0   <2e-16 ***
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 483.2 on 1302 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9446,     Adjusted R-squared: 0.9445
F-statistic: 2.219e+04 on 1 and 1302 DF,  p-value: < 2.2e-16
plot(x,y.lm$residuals,xlab = "Date", ylab = "residuals",
+ type = "p", col = "darkblue", lwd=1, cex = .6)
```

See the next slide.

The auxiliary regression.

```
x<-as.numeric(x)
er2<-y.lm$residuals^2
er2.lm<-lm(er2~1 + I(x) + I(x^2))
summary(er2.lm)
Residuals:   Min      1Q    Median     3Q     Max
          -445011 -176290  -34815   64325 1635485
Coefficients:Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -3.434e+06  3.490e+06  -0.984    0.325
I(x)         5.003e-03  7.861e-03   0.637    0.525
I(x^2)      -9.876e-13  4.417e-12  -0.224    0.823
Residual standard error: 295800 on 1301 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.2002,     Adjusted R-squared: 0.199
F-statistic: 162.8 on 2 and 1301 DF,  p-value: < 2.2e-16
nR <-1304*0.199
nR
[1] 259.496
```

$$nottem\{datasets\} \tag{61}$$

```
y<-as.numeric(Nile)
x<-1:length(Nile)
y.lm<-lm(y~1 + I(x) +I(x^2))
qqnorm(y.lm$residuals/sd(y.lm$residuals), main = "Normal Q-Q Plot",
+ xlab = "Theoretical Quantiles", ylab = "Sample Quantiles",
+ plot.it = TRUE, datax = FALSE, lwd=1, cex = .6, col = "darkblue")
x<-seq(-3, 3, 6/length(y))
lines(x,x, lty = 3, col = "red")
```

$$AirPassengers\{datasets\} \tag{62}$$

```
y<-as.numeric(AirPassengers)
x<-1:length(y)
plot(x,y, col="darkblue", xlab="n", ylab="AirPassengers", type="l")
y.lm<-lm(y~1 + I(x)+I(x^2))
lines(x,
+y.lm$coefficients[1] + y.lm$coefficients[2]*x + y.lm$coefficients[3]*(x^2),
+lty=3,col="red")
plot(x,y.lm$residuals, col="darkblue", xlab="n", ylab="Residuals", type="l
```

```
y<-as.numeric(log(AirPassengers))
x<-1:length(y)
plot(x,y, col="darkblue", xlab="n", ylab="log(AirPassengers)",
+ type="l")
y.lm<-lm(y~1 + I(x)+I(x^2))
summary(y.lm)
Residuals:  Min       1Q      Median     3Q       Max
        -0.29276 -0.08792 -0.02162  0.09699  0.28158
Coefficients: Estimate  Std. Error t value  Pr(>|t|)
(Intercept)  4.736e+00  3.429e-02 138.117  < 2e-16 ***
I(x)         1.323e-02  1.092e-03  12.112  < 2e-16 ***
I(x^2)      -2.191e-05  7.294e-06  -3.004  0.00316 **
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 0.1353 on 141 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9074,     Adjusted R-squared: 0.9061
F-statistic:  691 on 2 and 141 DF,  p-value: < 2.2e-16
lines(x,
+ y.lm$coefficients[1] + y.lm$coefficients[2]*x + y.lm$coefficients[3]*(x^2),
+lty=3,col="red")
plot(x,y.lm$residuals, col="darkblue", xlab="n",
+ylab="Residuals of log(AirPassengers)", type="l")
```

```
x<-1:40
i<-1
while (i < length(x) +1)
{y[i]<-4
y[i+1]<-2.5
y[i+2]<-3
y[i+3]<-1.5
i<-i+4}
plot(x,y,type="l",col="darkblue")

ys<-y+rnorm(40, mean=0, sd=sqrt(0.2))
plot(x,ys,type="l",col="darkblue",ylab="y, s^2 = 0.2")

ys<-y+rnorm(40, mean=0, sd=1)
plot(x,ys,type="l",col="darkblue",ylab="y, s^2 = 1")
```

```
y<-as.numeric(log(AirPassengers))
x<-1:length(y)
n<-length(y)
y.lm<-lm(y~1 + I(x)+I(x^2))
spluseps<-y.lm$residuals
delta<-0
k <- 1
for (k in 1:12)
{aux<-1
j<-1
while (j < (n - k)/12)
{aux[j]<- spluseps[k + j*12]
j<-j+1}
delta[k]<- mean(aux)}
plot(delta, type="l", col="darkblue")
delta
[1]-0.09003130 -0.11785568  0.01504120 -0.01591310 -0.01157023  0.11288192
[7] 0.21911427  0.21021694  0.06140709 -0.07584165 -0.21900224 -0.10352805
```

See the next slide.

```
logres<-c(y.lm$residuals,delta)
plot(logres, type="l", col="darkblue")
i<-1
for(i in 1:12)
logyprog[i]<-4.736 + 0.01323*(144+i) - 0.00002191*((144 + i)^2) + delta[i]
logyprog
 [1] 6.103661 6.082691 6.222398 6.198210 6.209276 6.340407
 [7] 6.453274 6.450968 6.308706 6.177961 6.041260 6.163150
 for(i in 1:12)
yprog[i]<-exp(4.736 + 0.01323*(144+i) - 0.00002191*((144 + i)^2) + delta[i])
yprog
 [1] 447.4930 438.2067 503.9102 491.8679 497.3410 567.0270
 [7] 634.7774 633.3152 549.3336 482.0080 420.4224 474.9218
a<-as.numeric(AirPassengers)
all<-c(a, yprog)
plot(all, type="l", col="darkblue")
```

These data are the daily log returns on BMW share price from Tuesday 2nd January 1973 until Tuesday 23rd July 1996.

$$bmw\{evir\} \tag{66}$$

```
data(bmw)
plot(bmw, type="l", col="darkblue",
+ main="mu_n = average (y(1), y(2), ..., y(n))")
bmw<-as.numeric(bmw)
mu<-bmw[1]
for (i in 2:length(bmw))
mu[i]<-mean(bmw[1:i])
x<-1:length(bmw)
lines(x, mu, lty=3, col="red")
plot(x[6100:6146],bmw[6100:6146], type="l", col="darkblue",
+ main="mu_n = average (y(1), y(2), ..., y(n))")
lines(x[6100:6146], mu[6100:6146], lty=3, col="red")
```

These data are the daily log returns on BMW share price from Tuesday 2nd January 1973 until Tuesday 23rd July 1996.

$$bmw\{evir\} \tag{67}$$

```
data(bmw)
plot(bmw, type="l", col="darkblue", main="alpha = 0.2")
alpha<-0.2
bmw<-as.numeric(bmw)
mu<-bmw[1]
for (i in 2:length(bmw))
mu[i]<-alpha*bmw[i]+(1 - alpha)*mu[i-1]
x<-1:length(bmw)
lines(x, mu, lty=3, col="red")
plot(x[6100:6146],bmw[6100:6146], type="l", col="darkblue",
+ main="alpha = 0.2")
lines(x[6100:6146], mu[6100:6146], lty=3, col="red")
```

These data are the daily log returns on BMW share price from Tuesday 2nd January 1973 until Tuesday 23rd July 1996.

$$bmw\{evir\} \tag{68}$$

```
data(bmw)
plot(bmw, type="l", col="darkblue", main="alpha = 0.8")
alpha<-0.8
bmw<-as.numeric(bmw)
mu<-bmw[1]
for (i in 2:length(bmw))
mu[i]<-alpha*bmw[i]+(1 - alpha)*mu[i-1]
x<-1:length(bmw)
lines(x, mu, lty=3, col="red")
plot(x[6100:6146],bmw[6100:6146], type="l", col="darkblue",
+ main="alpha=0.8")
lines(x[6100:6146], mu[6100:6146], lty=3, col="red")
```

```
data(bmw)
plot(bmw, type="l", col="darkblue", main="Exponential Smoothing Fit")
bmw<-as.numeric(bmw)
HoltWinters(bmw, alpha = NULL, beta = FALSE, gamma = FALSE)
Smoothing parameters:
 alpha:  0.04238786
 beta :  FALSE
 gamma:  FALSE
Coefficients:   [,1]
a          -0.0007476347
alpha<- 0.04238786
mu<-bmw[1]
for (i in 2:length(bmw))
mu[i]<-alpha*bmw[i]+(1 - alpha)*mu[i-1]
x<-1:length(bmw)
lines(x, mu, lty=3, col="red")
plot(x[6100:6146],bmw[6100:6146], type="l", col="darkblue",
+ main="Exponential Smoothing Fit")
lines(x[6100:6146], mu[6100:6146], lty=3, col="red")
```

Holt method. Exponential smoothing for a linear trend.

$$nhtemp\{datasets\} \tag{70}$$

```
x<-1912:1971
plot(x,nhtemp, type="l", col="darkblue",
+ main="Holt Exponential Smoothing Fit")
HoltWinters(nhtemp, alpha = NULL, beta = NULL, gamma = FALSE)
Smoothing parameters:
 alpha:  0.6471637
 beta :  0.3055974
 gamma:  FALSE
Coefficients:     [,1]
a          52.6478055
b           0.3128137
HW<-HoltWinters(nhtemp, alpha = NULL, beta = NULL,
+gamma = FALSE)
```

See the next slide.

HW$fitted
Time Series:
Start = 1914
End = 1971
Frequency = 1

	xhat	level	trend
1914	54.70000	52.30000	2.400000000
1915	52.62184	51.27003	1.351810746
1916	52.68779	51.63696	1.050833447

....

```
lines(x[2:59], HW$fitted[1:58,1] , lty=3, col="red")
lines(x[1:58], HW$fitted[1:58,2], lty=3, col="black")
plot(x[40:60], nhtemp[40:60], type="l", col="darkblue",
+ main="Holt Exponential Smoothing Fit")
lines(x[41:59], HW$fitted[40:58,1] , lty=3, col="red")
lines(x[40:58], HW$fitted[40:58,2] , lty=3, col="black")
```

See (??)

Prediction:

```
HW$fitted[58,1]
xhat      52.00182
muhat1971<-52.00182+ 0.6471637*(nhtemp[60]-52.00182)
muhat1971  52.64781
HW$fitted[58,2]
level      51.88642
HW$fitted[58,3]
trend      0.1154019
bhat1971<- 0.3055974 *(52.64781 - 51.88642) + (1 - 0.3055974)*0.1154019
0.3128142
y<-1
h<-1:5
y[1:5]<-52.64781 + 0.3128142*h
52.96062 53.27344 53.58625 53.89907 54.21188
x<-1912:1976
plot(x,c(nhtemp,y), type="l", col="darkblue",
+  main="Holt Exponential Smoothing Fit")
```

See (??) and (??).

Source: Vaux, J. E. and Brinker, N. B. (1972) Cycles, 1972, 117-121.
McNeil, D. R. (1977) Interactive Data Analysis. New York: Wiley.

Holt-Winters exponential smoothing with trend and multiplicative seasonal component.

$$AirPassengers\{datasets\} \tag{72}$$

m <- HoltWinters(AirPassengers, seasonal = "mult")

```
m
Smoothing parameters:    alpha:  0.2755925
                         beta :  0.03269295
                         gamma:  0.8707292
Coefficients:     [,1]
a           469.3232206
b             3.0215391
s1            0.9464611
s2            0.8829239
s3            0.9717369
s4            1.0304825
s5            1.0476884
s6            1.1805272
s7            1.3590778
s8            1.3331706
s9            1.1083381
s10           0.9868813
s11           0.8361333
s12           0.9209877
```

```
ls(m)
[1] "alpha"        "beta"         "call"         "coefficients" "fitted"
[6] "gamma"        "seasonal"     "SSE"          "x"
m$fitted
             xhat    level    trend    season
Jan 1950 111.0818 124.3169 1.145688 0.8853778
Feb 1950 122.3315 126.6822 1.185561 0.9567027
Mar 1950 137.4390 128.9246 1.220110 1.0560479
.......
y<-as.numeric(AirPassengers)
x<-1:length(y)
plot(x,y, col="darkblue", xlab="n", ylab="AirPassengers",type ="l")
lines(x[13:144], m$fitted[,1], type="l", col="red")
m$SSE
[1] 16570.78
sqrt(m$SSE)
[1] 128.7275
```

See (??).

```
m$fitted
              xhat    level    trend    season
Jan 1960 413.9168 436.2421 3.139507 0.9420439
Feb 1960 392.4512 440.2836 3.168996 0.8849902
.............
Nov 1960 395.4528 465.7202 3.104856 0.8434976
Dec 1960 434.5725 467.0435 3.046611 0.9244450
h<-1:12
y<- (467.0435 + 3.046611*h)*m$fitted[121:132,4]
x1<-1:156
plot(x1,c(as.numeric(AirPassengers),y), col="darkblue",
xlab="n", ylab="AirPassengers",type ="l")
y
[1] 442.8455 418.7213 491.1423 476.4648 500.6067 572.4999
[7] 660.1861 669.7890 549.4831 480.9854 422.2180 465.5531
```

Compare with

```
yprog
 [1] 447.4930 438.2067 503.9102 491.8679 497.3410 567.0270
 [7] 634.7774 633.3152 549.3336 482.0080 420.4224 474.9218
```

See (??) and (??).

Calculating SSE for Example 6.4.3.

(76)

```
logyprog<-0
i <-1
j<-0
while(i < 145)
{for(j in 0:11)
logyprog[i + j]<-exp(4.736 + 0.01323*(i+j) - 0.00002191*((i + j)^2) +
+  delta[j+1])
i<-i+12}
SSE<-sum((y-as.numeric(AirPassengers))^2)
SSE
[1] 12914011
sqrt(SSE)
[1] 3593.607
```

```
x<-USPop$year
y<-USPop$population
y.lm<-lm(y~1 + I(x) + I(x^2))
er2<-y.lm$residuals^2
er2.lm<-lm(er2~1 + I(x) + I(x^2) + I(x^3) + I(x^4))
summary(er2.lm)
Coefficients: Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -1.212e+05  3.917e+06  -0.031    0.976
I(x)         3.405e+02  8.279e+03   0.041    0.968
I(x^2)      -3.369e-01  6.559e+00  -0.051    0.960
I(x^3)       1.423e-04  2.308e-03   0.062    0.952
I(x^4)      -2.190e-08  3.045e-07  -0.072    0.944
Residual standard error: 15.44 on 17 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.2308,     Adjusted R-squared: 0.0498
F-statistic: 1.275 on 4 and 17 DF,  p-value: 0.3184
qchisq(0.95, 4)
[1] 9.487729
```

```
m <- HoltWinters(log(AirPassengers))
Smoothing parameters:
 alpha:  0.3266015
 beta :  0.005744138
 gamma:  0.8206654
Coefficients:
            [,1]
a    6.172308435
b    0.008981893
s1  -0.073201087
s2  -0.140973564
s3  -0.036703294
s4   0.014522733
s5   0.032554237
s6   0.154873570
s7   0.294317062
s8   0.276063997
s9   0.088237657
s10 -0.032657089
s11 -0.198012716
s12 -0.102863837
```

(79)

```
y<-as.numeric(log(AirPassengers))
x<-1:length(y)
plot(x,y, col="darkblue", xlab="n", ylab="log(AirPassengers)",type ="l")
lines(x[13:144], m$fitted[,1], type="l", col="red")
m$fitted    xhat     level      trend       season
Jan 1950 4.712792 4.820716 0.008044413 -0.115968777
Feb 1950 4.811194 4.839258 0.008104710 -0.036167846
..........................................
Dec 1960 6.076864 6.166067 0.008997723 -0.098200678
```

See (??).

```
h<-1:12
y<- 6.166067+ 0.008997723*h + m$fitted[121:132,4]
x1<-1:156
plot(x1,c(as.numeric(log(AirPassengers)),y), col="darkblue",
xlab="n", ylab="AirPassengers",type ="l")
y
[1] 6.102702 6.050457 6.213017 6.188216 6.240282 6.381560
[7] 6.522457 6.534685 6.337809 6.205732 6.075757 6.175839
plot(1:length(as.numeric(AirPassengers)),as.numeric(AirPassengers),
+ col="darkblue", xlab="n", ylab="AirPassengers",type ="l")
lines(13:length(as.numeric(AirPassengers)), exp(m$fitted[,1]),
+ type="l", col="red")
plot(x1,c(as.numeric(AirPassengers),exp(y)), col="darkblue",
+ xlab="n", ylab="AirPassengers",type ="l")
exp(y)
[1] 447.0639 424.3067 499.2050 486.9763 513.0032 590.8487
[7] 680.2477 688.6171 565.5557 495.5815 435.1786 480.9864
```

See (??) and (??).