МНОГОМЕРНО НОРМАЛНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ

(част от курс за магистри)

Павлина Йорданова
pavlina_kj@abv.bg

13 ноември 2021 г.

ШУ "Епископ Константин Преславски", България.

Дефиниция 1.1. Казваме, че компонентите на случайния вектор $\vec{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix}$ имат съвместно n-мерно нормално разпределение, ако съществуват n независими стандартно нормално разпределени случайни величини $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, неизродена матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ и вектор от константи $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, такива че

$$\vec{\eta} = \vec{m} + \mathbf{A}\vec{\xi}, \tag{1}$$

т.е.

$$\eta_i = m_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Накратко, $\vec{\eta} \in N(\vec{m}, \mathbf{AA}')$.

Свойства:

1. Ако $\vec{\eta} \in N(\vec{m}, \mathbf{A}\mathbf{A}')$, то

$$P_{\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}|det\mathbf{A}|} e^{-\frac{<\mathbf{A}^{-1}(\vec{y}-\vec{m}),\mathbf{A}^{-1}(\vec{y}-\vec{m})>}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}|det\mathbf{A}|} e^{-\frac{(\vec{y}-\vec{m})'(\mathbf{A}^{-1})'\mathbf{A}^{-1}(\vec{y}-\vec{m})}{2}}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Доказателство: От Дефиниция 1.1.

$$P_{\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = P_{m_1+\sum_{j=1}^n a_{1j}\xi_j, m_2+\sum_{j=1}^n a_{2j}\xi_j, \ldots, m_n+\sum_{j=1}^n a_{nj}\xi_j}(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Правим трансформацията

$$\vec{y} = \vec{m} + \mathbf{A}\vec{x} \iff \vec{x} = \mathbf{A}^{-1}(\vec{y} - \vec{m}) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n b_{1j}(y_j - m_j) \\ \ldots \\ \sum_{j=1}^n b_{nj}(y_j - m_j) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

където $\mathbf{A}^{-1} = (b_{ij})_{n\times n}$. Якобианът й е

$$\mathbf{J} = det\left(\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_{n\times n}\right) = det\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{det\mathbf{A}}.$$

Теоремата за съвместната плътност и разпределението на $\vec{\xi}$ ни дават

$$P_{\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n) =$$

$$= \frac{1}{|det\mathbf{A}|} P_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{1j}(y_j - m_j), \ldots, \sum_{j=1}^{n} b_{nj}(y_j - m_j)\right) =$$

$$= \frac{1}{|det\mathbf{A}|} P_{\xi_1}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{1j}(y_j - m_j)\right) \ldots P_{\xi_n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{nj}(y_j - m_j)\right) =$$

$$= \frac{1}{|det\mathbf{A}|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} b_{1j}(y_j - m_j)\right)^2}{2}} \ldots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} b_{nj}(y_j - m_j)\right)^2}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}|det\mathbf{A}|} e^{-\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} b_{1j}(y_j - m_j)\right)^2 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{n} b_{nj}(y_j - m_j)\right)^2}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}|det\mathbf{A}|} e^{-\frac{<\mathbf{A}^{-1}(\vec{y}-\vec{m}),\mathbf{A}^{-1}(\vec{y}-\vec{m})>}{2}}.$$

2. $\mathbb{E}\eta_i = \mu_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$

Доказателство: От (1) и свойствата на математическото очакване.

3. $\mathbb{D}\eta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = (\mathbf{AA}')_{ii},\ i = 1, 2, ..., n.$

Доказателство: От (1) и свойствата на дисперсията.

4. $||cov(\vec{\eta})||_{n\times n} = \mathbf{AA}' =: \mathbf{C}.$

Доказателство:

$$\begin{aligned} ||cov(\vec{\eta})||_{n\times n} &= \mathbf{E}[(\vec{\eta}-\vec{m})(\vec{\eta}-\vec{m})'] = \mathbf{E}[(\mathbf{A}\vec{\xi})(\mathbf{A}\vec{\xi})'] \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{A}\vec{\xi}\vec{\xi}'\mathbf{A}') = \mathbf{AE}(\vec{\xi}\vec{\xi}')\mathbf{A}' = \mathbf{AIA}' = \mathbf{AA}' =: \mathbf{C}. \end{aligned}$$

5. Нека $\mathbf{AA}' =: \mathbf{C}$, тогава $|det(\mathbf{A}^{-1})| = \sqrt{|\mathbf{C}^{-1}|}$. Матрицата $\mathbf{C}$ е симетрична, положително дефинитна и

$$P_{\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |det\mathbf{C}|}} e^{-\frac{(\vec{y}-\vec{m})'\mathbf{C}^{-1}(\vec{y}-\vec{m})}{2}}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Доказателство: Тъй като $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$, то

$$\mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{AA}')^{-1} = (\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}^{-\mathbf{1}})'\mathbf{A}^{-1}$$

то

$$det(\mathbf{C}^{-1}) = det[(\mathbf{AA}')^{-1}] = det[(\mathbf{A}')^{-1}]det[\mathbf{A}^{-1}] = [det(\mathbf{A}^{-1})]^2,$$

следователно $|det(\mathbf{A}^{-1})| = \sqrt{|\mathbf{C}^{-1}|}$.

От

$$(\mathbf{C}^{-1})' = [(\mathbf{A}\mathbf{A}')^{-1}]' = [(\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{A}^{-1}]' = [(\mathbf{A}^{-\mathbf{1}})'\mathbf{A}^{-1}]' = (\mathbf{A}^{-\mathbf{1}})'\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C}^{-1}$$

следва, че $\mathbf{C}^{-1}$ е симетрична, от където и $\mathbf{C}$ е симетрична.

Сега да докажем, че е положително дефинитна.
Разглеждаме $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$. Тогава,

$$\vec{x}'\mathbf{C}^{-1}\vec{x} = \vec{x}'(\mathbf{A}^{-\mathbf{1}})'\mathbf{A}^{-1}\vec{x} = (\mathbf{A}^{-\mathbf{1}}\vec{x})'\mathbf{A}^{-1}\vec{x} > 0.$$

Забележка: Тъй като плътността на разпределение еднозначно определя закона на разпределение на случайния вектор, то от свойства 2, 4 и 5 получаваме, че многомерното нормално разпределение се определя еднозначно от вектора от математическите очаквания и ковариационната матрица на координатите си.

6. Нека

$$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} \vec{\eta}_1 \\ \vec{\eta}_2 \end{pmatrix} \in N\left(\begin{pmatrix} \vec{m}_1 \\ \vec{m}_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{(11)} & \mathbf{C}^{(12)} \\ \mathbf{C}^{(21)} & \mathbf{C}^{(22)} \end{pmatrix}\right),$$

тогава

$$(\vec{\eta}_2|\vec{\eta}_1 = \vec{y}_1) \in N(\vec{m}_2+\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}(\vec{y}_1-\vec{m}_1); \mathbf{C}^{(22)}-\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\mathbf{C}^{(12)}).$$

Упътване:

$$||cov(\mathbf{A}\vec{\eta}, \vec{\theta})|| = \mathbf{A}||cov(\vec{\eta}, \vec{\theta})||.$$

$$||cov(\vec{\eta}, \mathbf{A}\vec{\theta})|| = ||cov(\vec{\eta}, \vec{\theta})||\mathbf{A}'.$$

Доказателство: Нека

$$\begin{pmatrix} \vec{\theta}_1 \\ \vec{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}^{(21)}\left(\mathbf{C}^{(11)}\right)^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\eta}_1 \\ \vec{\eta}_2 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{aligned} \vec{\theta}_1 &= \vec{\eta}_1 \\ \vec{\theta}_2 &= -\mathbf{C}^{(21)}\left(\mathbf{C}^{(11)}\right)^{-1}\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2. \end{aligned}$$

а) Ще докажем, че $\vec{\eta}_1 \perp \vec{\theta}_2$.

$$
\begin{aligned}
||cov(\vec{\eta}_1, \vec{\theta}_2)|| &= ||cov(\vec{\eta}_1, -\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2)|| \\
&= ||cov(\vec{\eta}_1, -\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\vec{\eta}_1)|| + ||cov(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)|| \\
&= ||cov(\vec{\eta}_1, -\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\vec{\eta}_1)|| + \mathbf{C}^{(12)} \\
&= -||cov(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_1)||(\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1})' + \mathbf{C}^{(12)} \\
&= -||cov(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_1)||((\mathbf{C}^{(11)})^{-1})'(\mathbf{C}^{(21)})' + \mathbf{C}^{(12)} \\
&= -\mathbf{C}^{(11)}((\mathbf{C}^{(11)})^{-1})'(\mathbf{C}^{(21)})' + \mathbf{C}^{(12)} \\
&= -\mathbf{C}^{(11)}((\mathbf{C}^{(11)})')^{-1}\mathbf{C}^{(12)} + \mathbf{C}^{(12)} \\
&= -\mathbf{C}^{(11)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\mathbf{C}^{(12)} + \mathbf{C}^{(12)} \\
&= -\mathbf{C}^{(12)} + \mathbf{C}^{(12)} = \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

б) Ще докажем, че

$$\mathbb{E}(\vec{\theta}_2|\vec{\eta}_1 = \vec{y}_1) = \mathbb{E}\vec{\theta}_2 = \mathbb{E}\vec{\eta}_2 - \mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\mathbb{E}\vec{\eta}_1.$$

От а),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\vec{\theta}_2|\vec{\eta}_1 = \vec{y}_1) &= \mathbb{E}\vec{\theta}_2 = \mathbb{E}(-\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2) \\ &= -\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\mathbb{E}\vec{\eta}_1 + \mathbb{E}\vec{\eta}_2 \end{aligned}$$

в) Сега да намерим математическото очакване и да покажем, че

$$\mathbb{E}(\vec{\eta}_2|\vec{\eta}_1 = \vec{y}_1) = \mathbb{E}\vec{\eta}_2 + \mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}(\vec{y}_1 - \mathbb{E}\vec{\eta}_1).$$

Това следва от предходното и факта, че

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\vec{\theta}_2|\vec{\eta}_1 = \vec{y}_1) &= \mathbb{E}(-\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2|\vec{\eta}_1 = \vec{y}_1) \\ &= \mathbb{E}(-\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\vec{\eta}_1|\vec{\eta}_1 = \vec{y}_1) + \mathbb{E}(\vec{\eta}_2|\vec{\eta}_1 = \vec{y}_1) \\ &= -\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\vec{y}_1 + \mathbb{E}(\vec{\eta}_2|\vec{\eta}_1 = \vec{y}_1). \end{aligned}$$

г) $||cov(\vec{\theta}_2)|| = ||cov(\vec{\theta}_2|\vec{\eta}_1 = \vec{y}_1)|| = ||cov(\vec{\eta}_2|\vec{\eta}_1 = \vec{y}_1)||$.

Първото равенство следва от а).
Относно второто използваме, че $cov(\xi + const, \eta) = cov(\xi, \eta)$.
По-точно,

$$\begin{aligned}
||cov(\vec{\theta}_2|\vec{\eta}_1 = \vec{y}_1)|| &= ||cov(-\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2|\vec{\eta}_1 = \vec{y}_1)|| \\
&= ||cov(-\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\vec{y}_1 + \vec{\eta}_2|\vec{\eta}_1 = \vec{y}_1)|| \\
&= ||cov(\vec{\eta}_2|\vec{\eta}_1 = \vec{y}_1)||.
\end{aligned}$$

д) Накрая да покажем, че

$$||cov(\vec{\eta}_2|\vec{\eta}_1 = \vec{y}_1)|| = \mathbf{C}^{(22)} - \mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\mathbf{C}^{(12)}.$$

От г)

$$\begin{aligned}
||cov(\vec{\eta}_2|\vec{\eta}_1 = \vec{y}_1)|| &= ||cov(\vec{\theta}_2)|| = ||cov(-\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2)|| \\
&= ||cov(-\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2, -\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2)|| \\
&= ||cov(-\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\vec{\eta}_1, -\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\vec{\eta}_1)|| \\
&+ 2||cov(-\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)|| + ||cov(\vec{\eta}_2, \vec{\eta}_2)|| \\
&= -\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}||cov(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_1)||(-\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1})' \\
&- 2\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}||cov(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)|| + ||cov(\vec{\eta}_2, \vec{\eta}_2)|| \\
&= -\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\mathbf{C}^{(11)}(-\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1})' \\
&- 2\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\mathbf{C}^{(12)} + \mathbf{C}^{(22)} \\
&= \mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1})' - 2\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\mathbf{C}^{(12)} + \mathbf{C}^{(22)} \\
&= \mathbf{C}^{(21)}((\mathbf{C}^{(11)})^{-1})'(\mathbf{C}^{(21)})' - 2\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\mathbf{C}^{(12)} + \mathbf{C}^{(22)} \\
&= \mathbf{C}^{(21)}((\mathbf{C}^{(11)})^{-1})'\mathbf{C}^{(12)} - 2\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\mathbf{C}^{(12)} + \mathbf{C}^{(22)} \\
&= -\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\mathbf{C}^{(12)} + \mathbf{C}^{(22)}.
\end{aligned}$$

Семинарно упражнение

Многомерно нормално разпределение

Зад. 1. Без да използвате матрици разпишете съвместната плътност на разпределение на двумерен нормално разпределен случаен вектор $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$, с математическо очакване на координатите съответно $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$, дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 и корелация $cor(\eta_1, \eta_2) = \rho$.

Решение: От връзката между ковариация и корелация имаме, че ковариационната матрица е:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \quad |det\mathbf{C}| = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2),$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} & \frac{1}{\sigma_2^2(1-\rho^2)} \end{pmatrix}.$$

Тогава от свойство 5, за $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$,

$$
\begin{aligned}
P_{\eta_1,\eta_2}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{|\mathbf{C}|}} e^{-\frac{(\vec{y}-\vec{m})'\mathbf{C}^{-1}(\vec{y}-\vec{m})}{2}} \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(\vec{y}-\vec{m})'\mathbf{C}^{-1}(\vec{y}-\vec{m})}{2}} \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(\vec{y}-\vec{m})'\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} & \frac{1}{\sigma_2^2(1-\rho^2)} \end{pmatrix}(\vec{y}-\vec{m})}{2}} \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(\vec{y}-\vec{m})'\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}(\vec{y}-\vec{m})}{2(1-\rho^2)}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{\eta_1,\eta_2}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{\left(\frac{y_1-m_1}{\sigma_1^2} - \frac{\rho(y_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} \quad -\frac{\rho(y_1-m_1)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y_2-m_2}{\sigma_2^2}\right)(\vec{y}-\vec{m})}{2(1-\rho^2)}} \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{\frac{(y_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\frac{\rho(y_1-m_1)(y_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}}{2(1-\rho^2)}}
\end{aligned}
$$

Забележка: Тъй като при такива случайни вектори се вижда, че

$$
\rho = 0 \iff P_{\eta_1,\eta_2}(y_1, y_2) = P_{\eta_1}(y_1) P_{\eta_2}(y_2), \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R},
$$

в този частен случай, понятията независимост и некорелираност са еквивалентни. Това, беше вярно и за Бернулиеви случайни величини (индикатори), но в общия случай не е вярно.

Зад. 2. Без да използвате матрици разпишете плътността на η_2 при условие $\eta_1 = x_1$ ако $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ е двумерен нормално разпределен случаен вектор, с математическо очакване $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$, дисперсии на координатите съответно σ_1^2 и σ_2^2 и корелация $cor(\eta_1, \eta_2) = \rho$.

Какво разпределение има η_2 при условие, че $\eta_1 = y_1$, $y_1 \in \mathbb{R}$?

Решение: От връзката между съвместна и условна плътност, за $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ имаме,

$$
\begin{aligned}
P_{\eta_2}(y_2|\eta_1 = y_1) &= \frac{P_{\eta_1,\eta_2}(y_1, y_2)}{P_{\eta_1}(y_1)} \\
&= \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{\frac{(y_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\frac{\rho(y_1-m_1)(y_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}}{2(1-\rho^2)}}}{\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2(1-\rho^2)}} e^{-\frac{\frac{\rho^2(y_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\frac{\rho(y_1-m_1)(y_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}}{2(1-\rho^2)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2(1-\rho^2)}} e^{-\frac{\frac{\rho^2\sigma_2^2(y_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\frac{\rho\sigma_2(y_1-m_1)(y_2-m_2)}{\sigma_1} + (y_2-m_2)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2(1-\rho^2)}} e^{-\frac{\left(m_2 + \frac{\rho\sigma_2(y_1-m_1)}{\sigma_1} - y_2\right)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}}
\end{aligned}
$$

Т.е. $(\eta_2|\eta_1 = y_1) \in N(m_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(y_1 - m_1), \sigma_2^2(1-\rho^2))$, което съответства на свойство 6.

Зад. 3. Ако

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \in N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho & 1 & 0 \\ \rho^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

намерете разпределението, математическото очакване и ковариационната матрица на

а) $\left(\begin{matrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{matrix} \mid \nu_3 = x_3 \right)$;

б) (с.р.) $\left(\begin{matrix} \nu_2 \\ \nu_3 \end{matrix} \mid \nu_1 = x_1 \right)$;

в) (с.р.) $\left(\begin{matrix} \nu_1 \\ \nu_3 \end{matrix} \mid \nu_2 = x_2 \right)$;

г) (с.р.) $cor(\nu_1, \nu_2)$, $cor(\nu_1, \nu_3)$, $cor(\nu_3, \nu_2)$.

Решение: а) Нека $\vec{\eta}_1 = \nu_3$ и $\vec{\eta}_2 = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$.

Прилагаме свойство 6.

$(\vec{\eta}_2|\vec{\eta}_1 = \vec{y}_1) \in N(\vec{m}_2+\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}(\vec{y}_1-\vec{m}_1); \mathbf{C}^{(22)}-\mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\mathbf{C}^{(12)})$.

$\vec{m}_1 = \mu_3,\ \vec{m}_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix},\ \mathbf{C}^{(11)} = 1,\ \mathbf{C}^{(12)} = \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{C}^{(22)} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$.

Тогава $\left(\begin{matrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{matrix} |\nu_3 = y_3\right) \in$

$$N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho^2 \\ 0 \end{pmatrix}(y_3 - \mu_3); \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho^2 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho^2 & 0 \end{pmatrix}\right) \iff$$

$$\left(\begin{matrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{matrix} |\nu_3 = y_3\right) \in N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 + \rho^2(y_3 - \mu_3) \\ \mu_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho^4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \iff$$

$$\left(\begin{matrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{matrix} |\nu_3 = y_3\right) \in N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 + \rho^2(y_3 - \mu_3) \\ \mu_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 - \rho^4 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right).$$

б) Нека $\vec{\eta}_1 = \nu_1$ и $\vec{\eta}_2 = \begin{pmatrix} \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$.

Прилагаме свойство 6.

$$(\vec{\eta}_2 | \vec{\eta}_1 = \vec{y}_1) \in N(\vec{m}_2 + \mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}(\vec{y}_1 - \vec{m}_1); \mathbf{C}^{(22)} - \mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\mathbf{C}^{(12)}).$$

$$\vec{m}_1 = \mu_1, \ \vec{m}_2 = \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C}^{(11)} = 1, \ \mathbf{C}^{(12)} = \begin{pmatrix} \rho & \rho^2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C}^{(22)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогава $\left(\begin{matrix} \nu_2 \\ \nu_3 \end{matrix} | \nu_1 = y_1 \right) \in$

$$N\left(\begin{pmatrix} \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho \\ \rho^2 \end{pmatrix} (y_1 - \mu_1); \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho \\ \rho^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & \rho^2 \end{pmatrix} \right) \iff$$

$$\left(\begin{matrix} \nu_2 \\ \nu_3 \end{matrix} | \nu_1 = y_1 \right) \in N\left(\begin{pmatrix} \mu_2 + \rho(y_1 - \mu_1) \\ \mu_3 + \rho^2(y_1 - \mu_1) \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho^2 & \rho^3 \\ \rho^3 & \rho^4 \end{pmatrix} \right) \iff$$

$$\left(\begin{matrix} \nu_2 \\ \nu_3 \end{matrix} | \nu_1 = y_1 \right) \in N\left(\begin{pmatrix} \mu_2 + \rho(y_1 - \mu_1) \\ \mu_3 + \rho^2(y_1 - \mu_1) \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 - \rho^2 & -\rho^3 \\ -\rho^3 & 1 - \rho^4 \end{pmatrix} \right).$$

в) Нека $\vec{\eta}_1 = \nu_2$ и $\vec{\eta}_2 = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$.

Прилагаме свойство 6.

$$(\vec{\eta}_2 | \vec{\eta}_1 = \vec{y}_1) \in N(\vec{m}_2 + \mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}(\vec{y}_1 - \vec{m}_1); \mathbf{C}^{(22)} - \mathbf{C}^{(21)}(\mathbf{C}^{(11)})^{-1}\mathbf{C}^{(12)}).$$

$$\vec{m}_1 = \mu_2,\ \vec{m}_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_3 \end{pmatrix},\ \mathbf{C}^{(11)} = 1,\ \mathbf{C}^{(12)} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{C}^{(22)} = \begin{pmatrix} 1 & \rho^2 \\ \rho^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогава $\left(\begin{matrix} \nu_1 \\ \nu_3 \end{matrix} | \nu_2 = y_2 \right) \in$

$$N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix} (y_2 - \mu_2); \begin{pmatrix} 1 & \rho^2 \\ \rho^2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & 0 \end{pmatrix} \right) \iff$$

$$\left(\begin{matrix} \nu_1 \\ \nu_3 \end{matrix} | \nu_2 = y_2 \right) \in N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 + \rho(y_2 - \mu_2) \\ \mu_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & \rho^2 \\ \rho^2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \iff$$

$$\left(\begin{matrix} \nu_1 \\ \nu_3 \end{matrix} | \nu_2 = y_2 \right) \in N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 + \rho(y_2 - \mu_2) \\ \mu_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 - \rho^2 & \rho^2 \\ \rho^2 & 1 \end{pmatrix} \right).$$