ШУМЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ „ЕПИСКОП КОНСТАНТИН ПРЕСЛАВСКИ”

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

З а д а ч и п о м а т е м а т и ч е с к и а н а л и з

I I ч а с т

Мирослав Христов

Шумен

Съдържание

§1 НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

1.1 Непосредствено интегриране

Д1.1 Функцията $F(x)$ се нарича примитивна на $f(x)$ в интервала (a,b) $\Leftrightarrow$ $F'(x)=f(x)$ за всяко $x\in(a,b)$.

Ако $F(x)$ е примитивна на $f(x)$ и c е произволна константа , функцията $F(x)+c$ е също примитивна на $f(x)$.

Д1.2 Множеството от примитивните функции на $f(x)$ се нарича *неопределен интеграл* и се записва по следния начин:

$$\int f(x)dx = F(x)+c,$$

където c пробягва множеството на реалните числа.

Намирането на неопределените интеграли на някои елементарни функции се свежда до следната таблица на основните интеграли:

Таблични интеграли	
$\int 1dx = x+c$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \mathrm{tg} x + c$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\mathrm{cotg} x + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c \end{cases}$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg} x + c \\ -\mathrm{arc\,cot\,g} x + c \end{cases}$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert + c$

За решаването на интеграли е необходимо да знаем следните няколко свойства:

1) $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$;

2) $\int c.f(x)dx=c\int f(x)dx$, където c е константа различна от *0*;

3) $\int f(x)dx=\int f(x)d(x+c)$, където c е константа;

4) $\int f(x)dx=\frac{1}{c}\int f(x)d(cx)$, където c е константа различна от *0*.

Под *непосредствено интегриране* се разбира „изравняване" на величина под знака на диференциала с аргумента на финкцията под интеграла и след това прилагане на някой от изброените по-горе интеграли в комбинация с посочените свойства.

В таблицата на основните интеграли предполагаме, че x е независима променлива. Но тези формули остават в сила и когато променливата x формално се замени с функция $u=\varphi(t)$, където φ има производна спрямо променливата t. Наистина нека е известно, че $\int f(x)\,dx=F(x)+C$. От правилото за диференциране на сложна функция имаме:

$$[F(\varphi(t))]'=F'(\varphi(t)).\varphi'(t)=f(\varphi(t)).\varphi'(t).$$

Тогава според дефиниция 1.2 можем да запишем:

$$\int f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt=F(\varphi(t))+C.$$

Тъй като $u=\varphi(t)$ и $d\,u=d\,\varphi(t)=\varphi'(t)\,dt$, след заместване в горното равенство получаваме:

$$\int f(\varphi(t))\;d\varphi(t)=F(\varphi(t))+C \text{ или } \int f(u)\;du=F(u)+C.$$

По такъв начин получаваме следната обобщена таблица.

Обобщена таблица на основните интеграли	
$\int 1 d\varphi(x) = \varphi(x) + c$	$\int \cos\varphi(x) d\varphi(x) = \sin\varphi(x) + c$
$\int \varphi(x)^{\alpha} d\varphi(x) = \dfrac{\varphi(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\int \dfrac{d\varphi(x)}{\sin^2\varphi(x)} = \mathrm{tg}\varphi(x) + c$
$\int \dfrac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \ln\lvert\varphi(x)\rvert + c$	$\int \dfrac{d\varphi(x)}{\cos^2\varphi(x)} = -\mathrm{cotg}\varphi(x) + c$
$\int a^{\varphi(x)} d\varphi(x) = \dfrac{a^{\varphi(x)}}{\ln a} + c$	$\int \dfrac{d\varphi(x)}{\sqrt{1-\varphi(x)^2}} = \begin{cases} \arcsin\varphi(x) + c \\ -\arccos\varphi(x) + c \end{cases}$
$\int e^{\varphi(x)} d\varphi(x) = e^{\varphi(x)} + c$	$\int \dfrac{d\varphi(x)}{1+\varphi(x)^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg}\varphi(x) + c \\ -\mathrm{arc\,cot\,g}\varphi(x) + c \end{cases}$
$\int \sin\varphi(x) d\varphi(x) = -\cos\varphi(x) + c$	$\int \dfrac{d\varphi(x)}{\sqrt{\varphi(x)^2 + a}} = \ln\left\lvert\varphi(x) + \sqrt{\varphi(x)^2 + a}\right\rvert + c$

Задача 1.1 Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \left(3x^2 + 2x - 7\right) dx$;

б) $\int \left(\dfrac{9}{x} - \dfrac{4}{x^3} + \sqrt[3]{x^2}\right) dx$;

в) $\int \left(2e^x - 5\cos x + \dfrac{1}{2+2x^x}\right) dx$;

г) $\int \left(\dfrac{2}{\sqrt{4-4x^2}} + \dfrac{3}{\sin^2 x}\right) dx$;

д) $\int \cos^2\dfrac{x}{2} dx$;

е) $\int \dfrac{x^2}{1+x^2} dx$;

ж) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x.\cos^2 x}$;

з) $\int \left(\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{3}{1+4x^2}\right) dx$;

и) $\int \left[\sin(7x-1) + \dfrac{1}{e^x}\right] dx$;

й) $\int \left(\dfrac{8}{5+9x^2} - \dfrac{11}{\cos^2\dfrac{x}{\pi}}\right) dx$.

Решения.

а) $\int\left(3x^2+2x-7\right)dx=\int 3x^2dx+\int 2xdx-\int 7dx=3\int x^2dx+2\int xdx-7\int 1dx=x^3+x^2-7x+c$;

б) $\int\left(\frac{9}{x}-\frac{4}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx=\int\frac{9}{x}dx-\int\frac{4}{x^3}dx+\int\sqrt[3]{x^2}dx=9\int\frac{dx}{x}-4\int x^{-3}dx+\int x^{\frac{2}{3}}dx=$

$=9\ln|x|+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+c$;

в) $\int\left(2e^x-5\cos x+\frac{1}{2+2x^x}\right)dx=2\int e^xdx-5\int\cos xdx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=2e^x-5\sin x+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+c$;

г) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-4x^2}}+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+3\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\arcsin x-3\cot gx+c$;

д) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int 1dx+\int\cos xdx\right)=\frac{1}{2}(x+\sin x)+c$

е) $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\int\frac{1+x^2}{1+x^2}dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx=x-\mathrm{arctg}x+c$;

ж) $\int\frac{dx}{\sin^2 x.\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx+\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx=$

$=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\mathrm{tg}x-\cot\mathrm{g}x+c$;

з) $\int\left(\frac{1}{x+2}+\frac{3}{1+4x^2}\right)dx=\int\frac{dx}{x+2}+\int\frac{dx}{1+(2x)^2}=\int\frac{d(x+2)}{x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{d2x}{1+(2x)^2}=$

$=\ln|x+2|+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2x)+c$;

и) $\int\left[\sin(7x-1)+\frac{1}{e^x}\right]dx=\int\sin(7x-1)dx+\int\frac{1}{e^x}dx=\frac{1}{7}\int\sin(7x-1)d(7x-1)-\int e^{-x}d(-x)=$

$=-\frac{1}{7}\cos(7x-1)-e^{-x}+c$;

$$й)\int\left(\frac{8}{5+9x^2}-\frac{11}{\cos^2\frac{x}{\pi}}\right)dx=\frac{8}{5}\int\frac{dx}{1+\frac{9x^2}{5}}-11\int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{\pi}}=\frac{8}{5}\frac{\sqrt{5}}{3}\int\frac{d\frac{3x}{\sqrt{5}}x}{1+\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right)^2}-11\pi\int\frac{d\frac{x}{\pi}}{\cos^2\frac{x}{\pi}}=$$

$$=\frac{8\sqrt{5}}{15}\operatorname{arctg}\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right)-11\pi.\operatorname{tg}\frac{x}{\pi}+c\ .$$

1.2 Интегриране чрез внасяне под диференциала. Формула за интегриране по части

В случаите когато е налице произведение от две или повече функции под знака на интеграла е удачно да използваме познатото ни равенство $dG(x)=G'(x)dx=g(x)dx$, където $G'(x)=g(x)$ или решаването на интеграла $\int g(x)dx$ означава по същество да внесем функцията $g(x)$ под знака на диференциала т.е. $\int f(x)g(x)dx=\int f(x)dG(x)$.

Много често при интегрирането се внасят под диференциала основните елементарни функции, затова е необходимо да запомним следните правила:

1. $\int f(x).x^n\,dx=\frac{1}{n+1}\int f(x)\,dx^{n+1}\ ,n\neq-1;$
2. $\int f(x).\frac{1}{x}dx=\int f(x)\,d\ln x\,;$
3. $\int f(x).a^x\,dx=\frac{1}{\ln a}\int f(x)\,da^x\ ;$
4. $\int f(x).e^x\,dx=\int f(x)\,de^x\ ;$
5. $\int f(x).\sin x\,dx=-\int f(x)\,d\cos x\,;$
6. $\int f(x).\cos x\,dx=\int f(x)\,d\sin x\,;$
7. $\int f(x).\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int f(x)\,d\arcsin x\,;$
8. $\int f(x).\frac{1}{1+x^2}\,dx=\int f(x)\,d\operatorname{arctg}x\,;$

9. $\int f(x).\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int f(x)\,d\text{tg}x$;

10. $\int f(x).\frac{1}{\sin^2 x}dx = -\int f(x)\,d\text{cotg}x$.

Задача 1.2 Пресметнете интегралите, чрез внасяне под знака на диференциала подходящата функция:

а) $\int e^{\sin x}\cos x dx$;

б) $\int \frac{\ln x}{x}dx$;

в) $\int x^2\sqrt{1+x^3}dx$;

г) $\int \frac{x}{1+x^4}dx$;

д) $\int \text{tg}x dx$;

е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x+3}}$;

ж) $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$;

з) $\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$.

Решения:

а) $\int e^{\sin x}\cos x dx = \int e^{\sin x}d\sin x = e^{\sin x}+c$;

б) $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \frac{1}{x}.\ln x dx = \int \ln x\, d\left(\ln x\right) = \frac{\ln^2 x}{2}+c$;

в) $\int x^2\sqrt{1+x^3}dx = \int \sqrt{1+x^3}\,d\frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}\int \left(1+x^3\right)^{\frac{1}{2}}d(1+x^3) = \frac{1}{3}\frac{\left(1+x^3\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = 2\sqrt{(1+x^3)^3}+c$;

г) $\int \frac{x}{1+x^4}dx = \int x\frac{1}{1+x^4}dx = \int \frac{1}{1+(x^2)^2}d\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(x^2)^2}dx^2 = \frac{1}{2}\text{arctg}x^2+c$;

д) $\int \text{tg}x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \sin x.\frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{1}{\cos x}d(-\cos x) = -\ln\left|\cos x\right|+c$,резултатът става очевиден, след умножение на диференциа с цислото -1;

е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x+3}} = \int \frac{1}{x}\frac{dx}{\sqrt{\ln^2 x+3}} = \int \frac{d\ln x}{\sqrt{\ln^2 x+3}} = \ln\left|\ln x+\sqrt{\ln^2 x+3}\right|+c$;

ж) Нека положим $f(x)=\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$, а $g(x)=\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$, тогава

$f(x)+g(x)=\int 1dx = x+c$

$f(x)-g(x)=\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int \frac{1}{\sin x+\cos x}d(\sin x+\cos x)=\ln\left|\sin x+\cos x\right|+c$, след

почленно събиране и изваждане получаваме съответно, че

$f(x)=\frac{1}{2}(x+\ln\left|\sin x+\cos x\right|)+c$ и $g(x)=\frac{1}{2}(x-\ln\left|\sin x+\cos x\right|)+c$.

Обикновено заедно с внасянето на функция под диференциала се иползва и *формулта за интегриране по части:* $\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x)$. Най-често се използва за решаване на интеграли от вида:

$$\int P(x)\left\{\begin{matrix} e^x \\ \sin x \\ \frac{1}{\sin^2 x} \end{matrix}\right\}dx \text{ и } \int R(x)\left\{\begin{matrix} \ln x \\ arc\sin x \\ arctgx \end{matrix}\right\}dx,$$

като първия вид се пресмята черз внасяне на трансцендентна функция под диференциала и интегрираме по части, а втория вид рационалната и отново по части.

Задача 1.3 Пресметнете, чрез интегриране по-части:

а) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$;

б) $\int (x^2-2x)e^{2x}dx$;

в) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$;

г) $\int x\mathrm{arctg}x dx$;

д) $\int e^x \cos x dx$;

е) $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$

Решения:

а) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx=\int x\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int xd\mathrm{tg}x = x\mathrm{tg}x-\int \mathrm{tg}xdx = x\mathrm{tg}x-(-\ln\left|\cos x\right|)+c$, последният интеграл е решен в задача 1.2. д);

б) Различното тук е, че аргумента на експоненциалната функция *2x*, не е равен на дифеденциала *x* затова се налага първо да ги „изравним”, като го умножим с *2* и разделим интеграла на ½.

$$\int (x^2-2x)e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int (x^2-2x)e^{2x}d\,2x=\frac{1}{2}\int (x^2-2x)de^{2x}=\frac{1}{2}\Big[(x^2-2x)e^{2x}-\int e^{2x}d(x^2-2x)\Big]=$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-2x)e^{2x}-\int (x-1)e^{2x}dx=\frac{1}{2}(x^2-2x)e^{2x}-\frac{1}{2}\int (x-1)de^{2x}=\frac{1}{2}(x^2-2x)e^{2x}-\frac{1}{2}\Big[(x-1)e^{2x}-\int e^{2x}dx\Big]=$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-2x)e^{2x}-\frac{1}{2}(x-1)e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+c\ ;$$

в) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx=-\int \ln x\, d\,\frac{1}{x}=-\frac{\ln x}{x}+\int \frac{1}{x}d\ln x=-\frac{\ln x}{x}+\int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{3x^3}+c\,;$

г) $\int x\,\mathrm{arctg}x\,dx=\frac{1}{2}\int \mathrm{arctg}x\,dx^2=\frac{x^2\mathrm{arctg}x}{2}-\frac{1}{2}\int x^2d\,\mathrm{arctg}x=\frac{x^2\mathrm{arctg}x}{2}-\int \frac{x^2}{1+x^2}dx=$

$=\frac{x^2\mathrm{arctg}x}{2}-\frac{1}{2}(x+\mathrm{arctg}x)+c$, последният интеграл е решен в задача 1.1. е).

д) Внасяме коя да е от двете функции под дифенциала и интегрираме по части

$$\int e^x\cos x dx=\int \cos x de^x=e^x\cos x-\int e^x d\cos x=e^x\cos x+\int e^x\sin x dx=e^x\cos x+\int \sin x de^x=$$

$$=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x d\sin x=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x dx\,.$$

Приравнявайки най-лявата и най-дясната част на веригата от равенства, получаваме интегралното уравнение

$$\int e^x\cos x=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x dx\ ,$$

откъдето

$$\int e^x\cos x=\frac{1}{2}\left(e^x\cos x+e^x\sin x\right)+c\,;$$

е) $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx=\int \frac{x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2}dx=\int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}dx-\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx=\int \frac{1}{1+x^2}dx-\int \frac{x.x}{(1+x^2)^2}dx=$

$$=\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx^2=\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\int x(1+x^2)^{-2}d(1+x^2)=\mathrm{arctg}x+\int xd(1+x^2)^{-1}=$$

интегрираме по части последният интеграл и получаваме:

$$= \mathrm{arctg}x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{arctg}x + \frac{x}{1+x^2}\right) + c\ .$$

1.3 Интегриране чрез субституции

За пресмятане на интеграла $\int f(x)dx$ понякога е целесъобразно да се извърши смяна на независимата променлива с помощта на някоя *субституция* $x = \varphi(t)$, където $\varphi(t)$ и нейната обратна функция $t = \psi(x)$ са диференцируеми.

Тогава $\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + c$ и $\int f(x)dx = F\left(\psi(x)\right) + c$ т.е. при субституция на практика се пресмята dx и обратната връзка $t = \psi(x)$, която заместваме в решението на интеграла.

Задача 1.4 Пресметнете интегрла:

а) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ с помощта на субституцията $x = a\cos t$ (*a>0*);

б) $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,dx$ с помощта на субституцията $x = t - 2$.

Решения:

а) Преди да пристъпим към решаване на интеграла е необходимо да направим някой предварителни пресмятания, а именно $dx = d(a\cos t) = (a\cos t)'dt = -a\sin t dt$ и $t = \arccos\frac{x}{a}$.

Заместваме в изходния интеграл и получаваме:

$$\int \sqrt{a^2 - \left(a\cos t\right)^2}.(-a\sin t)dt = -a\int \sin t.\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)}dt = -a^2\int \sin^2 t dt = -a^2\int \frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$

$= -\frac{a^2}{2}\left(\int 1dt - \int \cos 2t dt\right)$. Окончателния резултат е

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4}\sin(2\arccos\frac{x}{a}) + c$$

б) В този случай $dx = d(t-2) = (t-2)'dt = dt$ и $t = x+2$. Началният интеграл добива вида:

$$\int \frac{(t-2)+1}{(t-2)^2 + 4(t-2)+5}\,dt = \int \frac{t-1}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t}{t^2+1}\,dt + \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt^2 + \operatorname{arctg} t =$$

$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| + \operatorname{arctg} t + c$ и връщайки се към старата променлива получаваме

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|(x+2)^2+1\right| + \operatorname{arctg}(x+2) + c\,.$$

1.4 Интегриране на функция от вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx$

Пресмятането на тези интеграли се свежда до решаване на интеграли от рационалнни функции с помощта на субституцията $\frac{ax+b}{cx+d} = t^q$, където q е най-малкото общо кратно на знаменателите $q_1, q_2, \ldots, q_n$. По-точно търсената субституция се получава след решаване на последното равенство спрямо *x*.

Задача 1.5 Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\,dx$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$;

в) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

Решения:

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{3}}}dx$, за да направим необходимото полагане трябва да намерим

НОК(2,3)=6. Полагането ще бъде $x = t^6$, $dx = dt^6 = (t^6)'dt = 6t^5dt$ и $t = x^{\frac{1}{6}}$, тогава след заместване получаваме

$$\int \frac{(t^6)^{\frac{1}{2}}}{1-(t^6)^{\frac{1}{3}}}6t^5dt = 6\int \frac{t^8}{1-t^2}dt = 6\int (-t^6 - t^4 - t^2 - 1 + \frac{1}{1-t^2})dt =$$

Последното равенство е получено по следния начин:

$$\frac{t^8}{1-t^2} = -\frac{-t^8}{1-t^2} = -\frac{1-t^8+1}{1-t^2} = -\frac{1-t^8}{1-t^2} - \frac{1}{1-t^2} = -\frac{(1-t^4)(1+t^4)}{1-t^2} - \frac{1}{1-t^2} =$$

$$= -\frac{(1-t^2)(1+t^2)(1+t^4)}{1-t^2} - \frac{1}{1-t^2} = -(1+t^2)(1+t^4) - \frac{1}{1-t^2} = -t^6 - t^4 - t^2 - 1 + \frac{1}{1-t^2}.$$

Въщаме се към пресмятането на последният интеграл

$$= -6(\frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + t + \int \frac{1}{t^2-1}dt) = -\frac{6t^7}{7} - \frac{6t^5}{5} - \frac{6t^3}{3} - t + \frac{1}{2}(\int \frac{1}{t-1}dt - \int \frac{1}{t+1}dt) =$$

$$= -\frac{6t^7}{7} - \frac{6t^5}{5} - \frac{6t^3}{3} - t + \frac{1}{2}(\ln|t-1| - \ln|t+1|) + c.$$

Окончателно $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx = -\frac{6\sqrt[6]{x}^7}{7} - \frac{6\sqrt[6]{x}^5}{5} - \frac{6\sqrt[6]{x}^3}{3} - \sqrt[6]{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1} + c\right|$.

б) Интегралът очевидно не е във вида, който решаваме, затова е необходимо да направим следните преобразования

$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^4 \frac{x-2}{x-1}}} = \int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}} = \int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}dx$. Сега е ясно каква

субституция да направим а именно $\frac{x-2}{x-1} = t^2$. Тогава $x = \frac{2-t^2}{1-t^2}$ и $dx = \left(\frac{2-t^2}{1-t^2}\right)' dt =$

$= \frac{2t}{(1-t^2)^2} dt$, замествайки в интеграла получаваме:

$$\int \frac{1}{(\frac{2-t^2}{1-t^2}-1)^2} t \frac{2t}{(1-t^2)^2} dt = 2\int t^2 dt = \frac{2}{3} t^3 + c$$

и следователно $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} = \frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^3} + c$;

в) Полагаме $x+1 = t^6$, $dx = (t^6-1)dt = 6t^5 dt$, $t = \sqrt[6]{x+1}$. Тогава

$$\int \frac{t^6-1}{t^3+t^2} 6t^5 dt = 6\int \frac{t^9-t^3}{t-1} dt = 6\int (t^8+t^7+t^6+t^5+t^4+t^3)dt =$$

По аналогичен начин както в а), чрез разлагане и разкриване на скоби, стигаме до последния резултат и интегрирането след това ни води до следното

$$= 6\frac{t^9}{9} + 6\frac{t^8}{8} + 6\frac{t^7}{7} + t^6 + 6\frac{t^5}{5} + 3\frac{t^4}{2} + c.$$

Накрая стигаме до търсения резултат

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} dx = 2\frac{\sqrt[6]{x+1}^9}{3} + 3\frac{\sqrt[6]{x+1}^8}{4} + 6\frac{\sqrt[6]{x+1}^7}{7} + \sqrt[6]{x+1}^6 + 6\frac{\sqrt[6]{x+1}^5}{5} + 3\frac{\sqrt[6]{x+1}^4}{2} + c =$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} + \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} + x + 1 + c.$$

1.5 Биномен диференциал

Интеграли от вида $\int x^m (a+bx^n)^p dx$, където a и b са различни от нула константи, а m, n и p – рационални числа се наричат интеграли от *биномен диференциал* или *диференциален бином*. Съществуват три случая, когато тези интеграли се решават в елементарни функции.

i) Ако p е цяло число правим субституцията $x = t^k$, където k е най-малкото общо кратно на знаменателите на m и n;

ii) Ако $\dfrac{m+1}{n}$ е цяло число интегралът се свежда до интеграл от рационална функция с помощта на субституцията $a+bx^n=t^k$, където k е знаменателя на p;

iii) Ако $\dfrac{m+1}{n}+p$ е цяло, добре е първо да преобразуваме интеграла така: $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\int x^{m+np}(b+ax^{-n})^p\,dx$ и след това напраим полагането $b+ax^{-n}=t^k$, където k е знаменателя на p.

Когато числата *m, n* и *p* не удовлетворяват никое от посочените условия разглежданите интеграли не се изразяват в елементарни функция. Да отбележим още, че в случаите ii) и iii) съответните субституции функционират и без предположение за рационалност на *m* и *n*.

Задача 1.6 Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$; б) $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^2}$; в) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

Решения:

а) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=\int x^{-2}x^{-1}(1+x^{-2})^{-\frac{1}{2}}dx$, последното равенство е за по-голямо удобство при заместването. За константите $m=-2, n=2$ и $p=-\dfrac{1}{2}$ е изпълнено третото условие $\dfrac{m+1}{n}+p=\dfrac{-2+1}{2}-\dfrac{1}{2}=-1$. Тогава субституцията е следната $1+x^{-2}=t^2$.

Изразяваме $x=(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}$, $dx=d(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}=[(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}]'dt=-t(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}dt$ и отново се връщаме към пресмятането на интеграла

$-\int((t^2-1)^{-\frac{1}{2}})^{-3}(t^2)^{-\frac{1}{2}}t(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}dt=-\int dt=-t+c$ и $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\sqrt{1+x^{-2}}+c$.

б) записваме интеграла във вида $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^2} = \int (1+\sqrt[4]{x})^{-2}dx = \int x^0(1+x^{\frac{1}{4}})^{-2}dx$, тогава $m=0, n=\frac{1}{4}, p=-2$ - цяло. Следователно налице е първият случай. Полагаме $x=t^4$, $dx = dt^4 = (t^4)'dt = 4t^3dt$ и $\int (1+t)^{-2}4t^3 = 4\int \frac{t^3}{(1+t)^2}dt = 4\int\left(t-2+\frac{3t+2}{(1+t)^2}\right)dt = .$

$$= 4\int tdt - 8\int dt + 4\left(\int \frac{3}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}dt\right) = 2t^2 - 8t + 12\ln|t+1| + \frac{4}{1+t} + c .$$

Сумата $t-2+\frac{3t+2}{(1+t)^2}$ се получава След разделяне на полинома t^3 на полинома $(1+t^2) = t^2+2t+1$.

Откъдето $\int\frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^2} = 2\sqrt[4]{x}^2 - 8\sqrt[4]{x} + 12\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}} + c$;

в) записваме интеграла във вида $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int x^{\frac{-2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}dx$, тогава $m=-\frac{2}{3}, n=\frac{1}{3}, p=\frac{1}{2}$

и $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}} = 1$ - цяло число. Получихме втори случай. Полагаме $1+x^{\frac{1}{3}} = t^2$,

$x=(t^2-1)^3$ и $dx = \left[(t^2-1)^3\right]'dt = 6t(t^2-1)^2dt$ заместваме получените резултати в интеграла

$$\int\left((t^2-1)^3\right)^{\frac{-2}{3}}\left(t^2\right)^{\frac{1}{2}}6t(t^2-1)^2dt = 6\int t^2dt = 2t^3+c .$$

Връщаме се към x и $\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 2\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}^3 + c$.

1.6 Субституции на Ойлер

Интеграли от вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx \quad a\neq 0, b^2-4ac\neq 0$, където R е рационална функция на могат да бъдат приведени към интеграли от рационални функции с помощта на субституциите на Ойлер. Те се прилагат в следните случаи:

i) при $a>0$ може да се положи $\sqrt{ax^2+bx+c}=t+x\sqrt{a}$ или $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}$;

ii) при $c>0$ може да се положи $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx+\sqrt{c}$ или $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx-\sqrt{c}$;

iii) когато квадратният тричлен има реални нули x_1 и x_2 може да се положи

$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$ или $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_2)$.

Понякога е възможно конкретния интеграл от разглеждания вид да бъде пресметнат с помощта на повече от една от посочените субституции. Обемът на изчисленията зависи от приложените субституции.

Задача 1.7 Решете интегралите:

а) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+4}}$ в) $\int\frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x+4}}, x>1$;

Решения:

а) в този интеграл $a=1>0$ и $c=1>0$ можем да приложим първата и втората субстиуция, но нека да положим $\sqrt{x^2+x+1}=-x+t$. След повдигане в квадрат изразяваме x по следния начин: $x^2+x+1=x^2-2xt+t^2$ вторите степени на x се унищожават, което е характерно за тази субституция и $x+2xt=t^2-1$. От където $x.(1+2t)=t^2-1$ и $x=\frac{t^2-1}{1+2t}$.

Персмятаме $dx=d\left(\frac{t^2-1}{1+2t}\right)=\left(\frac{t^2-1}{1+2t}\right)' dt=\frac{2(t^2+t+1)}{(1+2t)^2}dt$ заместваме в дадения интеграл и стигаме до $2\int \frac{(t^2+t+1)}{t(1+2t)^2}dt$. Разлагаме подинтегралната функция в сума от елементарни дроби:

$$\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t} + \frac{C}{(1+2t)^2},$$

а от тук след привеждане под общ знаменател приравняваме числителите

$$t^2+t+1 = A(1+2t)^2 + Bt(1+2t) + Ct.$$

Последователно даваме следните стойности на t, $t=0, t=-\frac{1}{2}$ и $t=1$ и получаваме $A=1, B=-\frac{3}{2}$ и $C=-\frac{3}{2}$. Следователно

$$2\int \frac{(t^2+t+1)}{t(1+2t)^2}dt = 2\int\left(\frac{1}{t} - \frac{3}{2}\frac{1}{1+2t} - \frac{3}{2}\frac{1}{(1+2t)^2}\right)dt = 2\int\frac{dt}{t} - 3\int\frac{dt}{1+2t} - 3\int\frac{dt}{(1+2t)^2} =$$

$$= 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|1+2t| + \frac{3}{2}\frac{1}{1+2t} + c.$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = 2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}+x\right| - \frac{3}{2}\ln\left|1+2(\sqrt{x^2+x+1}+x)\right| + \frac{3}{2}\frac{1}{1+2(\sqrt{x^2+x+1}+x)} + c;$$

б) за решаване на този интеграл може да приложим втората субституция на Ойлер.

Полагаме $\sqrt{x^2-5x+4} = xt+2$ и след повдигане в крадрат двете страни може да изразим $x = \frac{5+4t}{1-t^2}$ и съответно $dx = d\left(\frac{5+4t}{1-t^2}\right) = \frac{4t^2+10t+4}{(1-t^2)^2}dt$. Като заместим в интеграла имаме

$$\int \frac{1}{\frac{5+4t}{1-t^2}t+2}.\frac{4t^2+10t+4}{(1-t^2)^2}dt = \int\frac{1-t^2}{2t^2+5t+2}\frac{4t^2+10t+4}{(1-t^2)^2}dt = 2\int\frac{1}{1-t^2}dt =$$

$$= 2\int\frac{1}{2}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+t}dt = \int\frac{1}{1-t}dt + \int\frac{1}{1+t}dt = -\ln|1-t| + \ln|1+t| + c = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c.$$

Решението на интеграла е $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+4}} = \ln\left|\frac{x-2+\sqrt{x^2-5x+4}}{x+2-\sqrt{x^2-5x+4}}\right| + c.$

в)тъй като квадратния тричлен под радикала има реални корени -4 и 1, може да положим

$\sqrt{x^2+3x+4}=t(x-1)$. Субституцията ни дава $x=\dfrac{t^2+4}{t^2-1}$ и $dx=-\dfrac{10t}{(t^2-1)^2}dt$ и следователно

$$-\int\frac{1}{\left(\dfrac{t^2+4}{t^2-1}+4\right)t\left(\dfrac{t^2+4}{t^2-1}-1\right)}\frac{10t}{(t^2-1)^2}dt=-10\int\frac{1}{(t^2+4+4t^2-4)(t^2+4-t^2+1)}dt=$$

$$=-\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{2}{5}\frac{1}{t}+c\,.$$

Прилагаме последната стъпка и получаваме $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x+4}}=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}+c$.

1.7 Интегриране на рационални функции на $\sin x$ и $\cos x$

Интеграли от вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, където R е рационална функция на две променливи ($\sin x$ и $\cos x$), могат да се сведат до интеграли от рационална функция с помощта на следните субституции:

i) При $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, полагаме $t=tgx$.

Тогава $\sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}$, $\sin x\cos x=\dfrac{t}{1+t^2}$ и $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$;

ii) При $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, полагаме $t=\cos x$.

Тогава $\sin x=\sqrt{1-t^2}$ и $dx=-\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$;

iii) При $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, полагаме $t=\sin x$.

Тогава $\cos x=\sqrt{1-t^2}$ и $dx=\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Ако не е изпълнени никое от по-горните условия, може да приложим така наречената „универсална субституция”: $t=tg\dfrac{x}{2}$. Тогава $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2},\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ и

$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$. Да отбележим, че това полагане понякога води до сложни интеграли от рационални функции.

Задача 1.8 Да се пресметнат интеграите:

а) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$;

б) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$;

Решения:

а) Тъй като $R(\sin x, -\cos x) = \sin^2 x(-\cos x)^3 = -\sin^2 x \cos^3 x = -R(\sin x, \cos x)$, удобно е да се извърши субституцията $t = \sin x$. След заместване в началният интеграл получаваме:

$$-\int t^2\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\int t^2\left(1-t^2\right)dt = -\int\left(t^2 - t^4\right)dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + c.$$

Откъдето достигаме до резултата $\int \sin^2 x \cos^3 x dx = -\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + c$;

б) За подинтегралната функция е изпълнено

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{2\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} == \frac{2(-\cos x)(-\sin x)}{(-\sin x)^4 + (-\cos x)^4} = R(-\sin x, -\cos x)$$

следователно тук може да положим $t = \mathrm{tg} x$ и интеграла добива вида:

$$\int \frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{t^4}{(1+t^2)^2}} \frac{1}{1+t^2}dt = 2\int \frac{t}{1+t^4}dt = \int \frac{1}{1+(t^2)^2}dt^2 = \mathrm{arctg} t^2 + c.$$

.

Връщаме се към обратната връзка в полагането и $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx = arctg(tg^2 x) + c$;

в) Очевидно при този интеграл не може да използваме никое от първите три полагания, затова ще използваме универсалната субституция.

$$\int \frac{1}{2\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}} 2\frac{1}{1+t^2}dt = 2\int \frac{1}{t^2+4t-1}dt$$

Разлагаме $\frac{1}{t^2+4t-1}$ в сума от елементарни дроби по следния начин:

$\frac{1}{t^2+4t-1} = \frac{A}{t+2-\sqrt{5}} + \frac{B}{t+2+\sqrt{5}}$ и следователно $1 = A(t+2+\sqrt{5}) + B(t+2-\sqrt{5})$, от където лесно намираме, че $B = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$ и $A = \frac{1}{2\sqrt{5}}$. Тогава

$$2\int \frac{1}{t^2+4t-1}dt = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\int \frac{1}{t+2-\sqrt{5}}dt - \int \frac{1}{t+2+\sqrt{5}}dt\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\ln\left|t+2-\sqrt{5}\right| - \ln\left|t+2+\sqrt{5}\right|\right) + c =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t+2-\sqrt{5}}{t+2+\sqrt{5}}\right| + c;$$

Окончателно $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right| + c$.

1.8 Задачи за самоподготовка

1. $\int (7x^6 + 2\sqrt[3]{x})dx$;

2. $\int (4\cos x - 3e^{x+3})dx$;

3. $\int \left((2x-7)^4 - \frac{1}{4x-1}\right)dx$;

4. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-16x^2}} + \frac{5}{\cos^2 3x}\right)dx$;

16. $\int \sqrt{4-x^2}dx$;

17. $\int (3x^2+6)\sin x dx$;

18. $\int arctgx dx$;

19. $\int \frac{1}{(4+x^2)^2}dx$;

5. $\int \frac{1}{x^2(1-x^2)}dx$;

6. $\int (tg^2 x + \cot g^2 x)dx$;

7. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$;

8. $\int \sin 2x \sin 5x dx$;

9. $\int \frac{1}{\sin x}dx$;

10. $\int \frac{1}{e^x+1}dx$;

11. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$;

12. $\int \frac{1}{\cos^4 x}dx$;

13. $\int \frac{x}{3-2x^2}dx$;

14. $\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$;

15. $\int \frac{1}{e^{2x}+e^{-2x}+2}dx$;

20. $\int (x^2-1)e^{3x-1}dx$;

21. $\int \frac{\arccos x}{x^2}dx$;

22. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$;

23. $\int \frac{1}{3x+\sqrt[3]{x^2}}dx$;

24. $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$;

25. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

26. $\int \sqrt{x^3+x^4}dx$;

27. $\int \frac{1}{3x+\sqrt[3]{x^2}}dx$;

28. $\int \frac{1}{3+\cos x}dx$;

29. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+1}dx$;

30. $\int \frac{1}{\sin x(2\cos^2 x-1)}dx$.

&2 НЕСОБСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ

2.1. Несобствени интеграли от първи и втори род

Нека $f(x)$ е функция дефинирана в безкрайният интервал $[a,\infty]$ и нека при всяко $A > a$ да съществува определеният интеграл $\int_a^A f(x)dx$.

Д2.1 Ако съществува крайна граница $\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx$, то тази граница се нарича *несобствен интеграл от първи род* за функцията $f(x)$ върху интервала $[a,\infty]$ и се бележи $\int_a^\infty f(x)dx$, като в този случай се казва, че $\int_a^\infty f(x)dx$ е *сходящ.* В противен случай казваме, че интеграла е *разходящ.* По аналогичен начин се дефинира и $\int_{-\infty}^b f(x)dx$.

Д2.2 Ако $\int_a^\infty |f(x)|dx$ е сходящ тогава $\int_a^\infty f(x)dx$ се нарича *абсолютно сходящ.*

Д2.3 Ако $\int_a^\infty f(x)dx$ е сходящ, но $\int_a^\infty |f(x)|dx$ не е абсолютно сходящ, то $\int_a^\infty f(x)dx$ се нарича *условно сходящ.*

Т2.1 Ако $\int_a^\infty f(x)dx$ е абсолютно сходящ, тогава $\int_a^\infty f(x)dx$ е и сходящ.

Т2.2(Признак за сравнение) Нека за $x\in[a,\infty)$ имаме $|f(x)|\le g(x)$. Тогава:

а)Ако $\int_a^\infty g(x)dx$ е сходящ следва, че и $\int_a^\infty f(x)dx$ е сходящ;

б)Ако $\int_a^\infty f(x)dx$ е разходящ следва, че и $\int_a^\infty g(x)dx$ е разходящ.

Ролята на втори интеграл (този с който сравняваме) се играе най-често от $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$, за който лесно може да се установи, че е сходящ за $\alpha > 1$ и разходящ при $\alpha \leq 1$.

Сл2.1 Нека $f(x) \geq 0$ за всяко $x \in [a, +\infty)$, $g(x) > 0$ за всяко $x \in [a, +\infty)$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Тогава:

а) ако $0 < \ell < +\infty$, то несобствените интеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ са едновременно сходящи или разходящи;

б) ако $\ell = 0$, от сходимостта на $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следва сходимостта на $\int_a^{+\infty} f(x)dx$;

в) ако $\ell = +\infty$, от разходимостта на $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следва разходимостта на $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Т2.3(Критерий на Дирихле) Нека $f(x)$ е непрекъсната върху $[a, \infty)$, примитивната и $F(x) = \int f(x)dx$ е ограничена , $g(x)$ е непрекъснато диференцируема и монотонна функция клоняща към 0 при $x \to \infty$. Тогава $\int_a^{\infty} f(x)g'(x)dx$ е сходящ. (Ще отбележим, че изискването за непрекъснатата диференцируемост на $g(x)$ не е съществено.)

Нека $f(x)$ е неограничена в интервала $[a, b]$, но е ограничена във всеки интервал $[a, b-\varepsilon]$, където $b - a \geq \varepsilon > 0$ и $f(x)$ е интегруема в $[a, b-\varepsilon]$.

Д2.4 Ако съществува крайната граница $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то тя се нарича *несобствен интеграл от втори род.* В този случай се казва, че интеграла $\int_a^b f(x)dx$ е *сходящ*, а ако тази граница не съществува, интеграла е *разходящ*. Точката b се нарича *особена* точка.

Това понятие може да се разшири в случай на повече от една особени точкаи.

Ако $c \in (a,b)$ и функцията $f(x)$ не е ограничена в никоя околност на тази точка, тогава по дефиниция $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \mu \to 0}} \left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\mu}^b f(x)dx \right]$, където ε и μ клонят към 0 независимо едно от друго.

Ще отбележим, че ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b)$, b - особена точка, то чрез смяна на променливата $x = b - \frac{1}{t}, t > 0$, несобствения интеграл от втори род се свежда към несобствен интеграл от първи род.

Д2.5 Ще казваме, че функцията $f(x)$ е *интегруема по Коши*, ако тя е дефинирана върху правата $(-\infty, +\infty)$, интегруема във всеки краен интервал и ако съществува границата $\lim\limits_{A \to \infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$. Това число ще наричаме главна стойност на несобствения интеграл в смисъл на Коши и бележим със символа $V.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Понятието главна стойност, може да се дефинира и за несобствени интеграли от втори род по аналогичен начин.

Несобствените интеграли могат да бъдат интегрирани по части, когато $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснато дифернцируеми и $L = \lim\limits_{x \to \infty} f(x).g(x)$. Тогава ако е сходящ поне единият от несобствените интеграли $\int\limits_a^{\infty} f(x)g'(x)dx$, $\int\limits_a^{\infty} f'(x)g(x)dx$ то е сходящ и другия и е в сила следната формула $\int\limits_a^{\infty} f(x)g'(x)dx = L - f(a).g(a) - \int\limits_a^{\infty} f'(x)g(x)dx$.

Задача2.1 Изследвайте за сходимост интегралите и ако е възможно намерете стойностите им:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\ln 2} e^x dx$; в) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+8x+15} dx$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ д) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x^3+2x}{6x^4+5x^2+3x+2} dx$.

Решения:

а) Функцията $\dfrac{1}{1+x^2}$ е непрекъсната в $[0,+\infty)$ и затова е интегруема във всеки негов затворен подинтеграл. Търсим границата:

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} x\,\Big|_0^A\right) = \lim_{A\to+\infty}(\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} 0) = \lim_{A\to+\infty}\operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2}.$$

Според дефиниция 2.1, интегралът е сходящ и $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

б) За $\alpha < \ln 2$ пресмятаме:

$$\int_\alpha^{\ln 2} e^x dx = e^x\,\Big|_\alpha^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^\alpha = 2 - e^\alpha \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^{\ln 2} e^x dx = \lim_{\alpha\to-\infty}(2-e^\alpha) = 2.$$

Според дефиниция 2.1, интегралът е сходящ и $\displaystyle\int_{-\infty}^{\ln 2} e^x dx = 2$.

в) Прилагаме дефиницията т.е. търсим $\displaystyle\lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{1}{x^2+8x+15}\,dx$. След което пресмятаме определениият интеграл, но преди това представяме подинтегралната функция във вида $\dfrac{1}{x^2+8x+15} = \dfrac{1}{2(x+3)} - \dfrac{1}{2(x+5)}$ и съответно $\displaystyle\int_1^A \frac{1}{x^2+8x+15}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int_1^A \frac{1}{x+3}\,dx - \frac{1}{2}\int_1^A \frac{1}{x+5}\,dx == \frac{1}{2}\ln|x+3|\Big|_1^A - \frac{1}{2}\ln|x+5|\,\Big|_1^A =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(A+3) - \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\ln(A+5) + \frac{1}{2}\ln 6 = \frac{1}{2}\ln\frac{A+3}{A+5} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Накрая пресмятаме и $\displaystyle\lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{1}{x^2+8x+15}\,dx = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}\left[\ln\frac{A+3}{A+5} + \ln\frac{3}{2}\right] = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$, защото $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{A+3}{A+5} = 1$ и $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\ln\frac{A+3}{A+5} = \ln 1 = 0$.

г) Даденият несобствен интеграл е с две безкрайни интеграционни граници. За да покажем сходимостта му трябва да покажем сходимостта на всеки един от двата несобствени интеграла:

$$\int_{-\infty}^{c}\frac{1}{1+x^2}\,dx \quad \text{и} \quad \int_c^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx,$$

където c е произволно число. Както в а). лесно получаваме, че $\int\limits_{c}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}c$. Първият интеграл пресмятаме според дефиниция 2.1:

$$\int\limits_{-\infty}^{c}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{\alpha\to-\infty}\int\limits_{\alpha}^{c}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{\alpha\to-\infty}\operatorname{arctg}\Big|_{\alpha}^{c}=$$

$$=\lim_{\alpha\to-\infty}(\operatorname{arctg}c-\operatorname{arctg}\alpha)=\operatorname{arctg}c-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{arctg}c+\frac{\pi}{2}.$$

Окончателно получаваме, че даденият интеграл е сходящ и стойността му е равна на:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\int\limits_{-\infty}^{c}\frac{1}{1+x^2}dx+\int\limits_{c}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg}c+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\text{-}\operatorname{arctg}c=\pi.$$

д) Подинтегралната функция приема в интервала $[2,+\infty)$ само положителни стойности. Преобразуваме я по следния начин:

$$\frac{x^3+2x}{6x^4+5x^2+3x+2}=\frac{x^3.\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^4.\left(6+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)}=\frac{1}{x}.\frac{1+\frac{2}{x^2}}{6+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}}\quad\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3+2x}{6x^4+5x^2+3x+2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{6+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}}=\frac{1}{6},$$

защото $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^4}=0$. Тъй като $\frac{1}{6}>0$ и $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ е разходящ, то според следствие 2.1 и даденият интеграл е разходящ.

Задача3.2 Докажете, че интеграла $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ е сходящ.

Решение:

Тъй като $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, то интеграла няма особена точка при $x=0$, така че вместо $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$, може да разглеждаме $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$. За последният интеграл прилагаме критерия на

Дирихле (Т2.3) . Може да считаме, че $f(x)=\sin x$ - непрекъсната функция, и нейната примитивна $\int \sin x dx - \cos x$ е ограничена. За $g(x)=\frac{1}{x}$ е ясно че е монотонна функция при това $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. Тогава съгласно Т2.3 интеграла е сходящ.

Сходимостта на дадения интеграл може да бъде получена, като се приложи и формулата за интегриране по части, а именно:

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx=-\int_1^\infty \frac{1}{x}d\cos x=-\frac{\cos x}{x}\Bigg|_1^\infty-\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx=-\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}+\cos 1-\int_1^\infty\frac{\cos x}{x^2}dx=\cos 1-\int_1^\infty\frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Очевидно е следното неравенство $\frac{|\cos x|}{x^2}<\frac{1}{x^2}$ за всяко $x>1$, а от тук и $\int_1^\infty\frac{|\cos x|}{x^2}dx<\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx$. От по-горе знам , че $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx$ е сходящ и съгласно признака за сравнение (Т2.2), следва сходимостта на $\int_1^\infty\frac{|\cos x|}{x^2}dx$. Тогава след граничен преход в равенството $\int_1^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\cos 1-\int_1^\infty\frac{\cos x}{x^2}dx$, получаваме че $\int_1^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ е сходящ.

Задача2.3 Изследвайте за сходимост несобствения интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}.\ln x}{x+1}dx$.

Решение:

Преобразуваме подинтегралната функция $f(x)=\frac{\sqrt{x}.\ln x}{x+1}$, която приема в интервала $[1,+\infty)$ само положителни стойности, по следния начин:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}.\ln x}{x+1}=\frac{\sqrt{x}\quad.\ \ln x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}\ \cdot\ \frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\ \cdot\ \frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}}$$. Нека $g(x)=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ тогава

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x}.\ln x}{x+1}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}}=+\infty$$, защото $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

Тъй като $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$ е разходящ $\left(\frac{1}{2} < 1\right)$, то според Сл2.1 и даденият интеграл е разходящ.

Задача2.4 Намерете за какви стойности на реалния параметър λ интеграла $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{x^{\lambda}} dx$ е сходящ.

Решение.

Нека да представим интеграла като сума от следните два, а именно:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{x^{\lambda}} dx = \int_0^{a} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{x} . \frac{1}{x^{\lambda-1}} dx + \int_a^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{x^{\lambda}} dx = I_1 + I_2 .$$

За I_2 се вижда, че $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} 5x = \frac{\pi}{2}$ и интеграла съответно $\int_a^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{x^{\lambda}} dx \le c \int_a^{\infty} \frac{1}{x^{\lambda}} dx$, където константа c ограничава функцията в околност на ∞. Тогава съгласно следствието на признака за сравнение (Сл2.1) I_2 е сходящ, когато $\lambda > 1$.

Нека разглеждаме и I_1. Точката $x = 0$ е особена. Пресмятаме границата , $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\operatorname{arctg} 5x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{5}{1+(5x)^2} = 5$ и от тук $\int_0^{a} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{x} . \frac{1}{x^{\lambda-1}} dx \le c \int_0^{a} \frac{1}{x^{\lambda-1}} dx$, където константа c ограничава функцията $\frac{\operatorname{arctg} 5x}{x}$ в околност на нулата. Аналогично на горният интеграл I_1 е сходящ за $\lambda - 1 < 1$ т.е. за $\lambda < 2$.

Окончателно нашият интеграл е сходящ, когато са сходящи I_1 и I_2 едновременно, т.е при $\lambda \in (1, 2)$.

2.2 Ойлерови интеграли

Д2.6 Интегралът $\Gamma(p)=\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$, който е сходящ при $p>0$, се нарича гама-функция (Ойлеров интеграл от първи род).

Гама функцията е непрекъсната и притежава непрекъснати производни от произволен ред при $p>0$, които се намират чрез диференциране по параметъра *p*, т.е.

$$\Gamma^{(k)}(p)=\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}\ln^k x.e^{-x}dx,\ k\in\mathbb{N}.$$

Основни свойства:

При $p>0$

1. $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$;
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$;
3. $\Gamma(n)=(n-1)!,\ n\in\mathbb{N}$;
4. $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$.

При $0<p<1$

5. $\Gamma(p).\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$.

Д2.7 Интегралът $B(p,q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$, който е сходящ при $p>0$, $q<0$, се нарича бета функция (Ойлеров интеграл от втори род).

Бета-функцията е непрекъсната в областта $D=\left\{(p,q)\in\mathbb{R}^2 : p>0, q>0\right\}$ и притежава непрекъснати частни производни спрямо *p* и *q* от произволен ред, които се намират чрез диференциране на горния интеграл по съответният параметър.

Основни свойства:

6. При $p>0,\ q>0$ е в сила $B(p,q)=B(q,p)$;

7. При $p>1,\ q>0$ е в сила $B(p,q)=\dfrac{p-1}{p+q-1}.B(p-1,q)$;

8. При $p>0,\ q>1$ е в сила $B(p,q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}.B(p,q-1)$;

9. При $n,m\in\mathbb{N}$ е изпълнено $B(m,n)=\dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$.

10. Връзката между гама и бета функции е следната $B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Задача2.5 Като изпозвате свойствата на гама и бета функциите, пресметнете интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$;

б) $\displaystyle\int_0^a x^2.\sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ a>0$;

в) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx$;

г) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$;

г) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^6 x.\cos^4 x dx$;

е) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx,\quad 0<p<1$;

ж) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$.

Решения

а) Правим следните преобразования:

$J=\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{x(1-x)}\,dx=\int_0^1\sqrt{x}.\sqrt{1-x}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{3}{2}-1}(1-x)^{\frac{3}{2}-1}\,dx=B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$. Като използваме връзката между бета и гама функцията получаваме, че $J=B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}$. Последователно прилагаме свойства 1, 3 и 4, тогава

$$J=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma(3)}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2.1}=\frac{\pi}{8}.$$

б) В интеграла $J=\int_0^a x^2.\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ полагаме $\frac{x^2}{a^2}=t\ \ (t>0)$, пресмятаме $dx=da\sqrt{t}=\left(a\sqrt{t}\right)'dt=\frac{a}{2\sqrt{t}}dt$. Новите граници в интеграла са: при $x=0\ \to\ t=\frac{0^2}{a^2}=0$ и при $x=a\ \to\ t=\frac{a^2}{a^2}=1$. След заместване в J имаме $\int_0^1 a^2t.\sqrt{a^2-a^2t^2}\ \frac{a}{2\sqrt{t}}\,dx=$ $\frac{a^4}{2}\int_0^1\sqrt{t}\sqrt{1-t^2}\,dt$. Очевидно стигнахме до решаване на предходната задача, а и от там до отговора, който е $J=\frac{a^4}{2}.\frac{\pi}{8}=\frac{\pi.a^4}{16}$;

в) Привеждаме интеграла в следния вид $J=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}\,dx=$ $=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{5}{4}-1}}{(1+x)^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}}\,dx$. Ясно е, че $p=\frac{5}{4}$, $q=\frac{3}{4}$ и съответно $J=B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)$. Като използваме свойства 6, 10, 1 и 5 получаваме

$$J=B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=B\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)}=\Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}.\frac{\pi}{\sin\frac{1}{4}\pi}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}};$$

г) Полагаме $x^3 = t$. Пресмятаме $dx = dt^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.t^{-\frac{2}{3}}dt$ и новите граници на интеграла , при $x = 0 \;\to\; t = 0$, а при $x = +\infty \;\to\; t = +\infty$. Заместваме в изходния интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{2}{3}}}{3(1+t)} dt = \frac{1}{3}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{3}-1}}{(1+t)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}} dt$, тогава $p = \frac{1}{3}$ и $q = \frac{2}{3}$. Използвайки свойства 10, 3 и 5 на Ойлеровите интеграли, получаваме следното

$$\frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.\frac{\pi}{\sin\frac{1}{3}\pi} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

С което интегралът е пресметнат.

д) На пръв поглед и този интеграл не прилича на никой от Ойлеровите. След смяна на променливото $t = \sin^2 x$ и необходимите ни $dx = d\arcsin\sqrt{t} = \frac{1}{\sqrt{1-t}}\left(\sqrt{t}\right)' dt =$

$= \frac{1}{\sqrt{1-t}}.\frac{1}{2.\sqrt{t}}dt$, граници при $x = 0 \;\to\; t = 0$ и $x = \frac{\pi}{2} \;\to\; t = 1$, интеграла придобива вида: $\int\limits_0^1 t^3.\left(\sqrt{1-t}\right)^2 \frac{1}{2.\sqrt{t}.\sqrt{1-t}} dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{5}{2}}\left(1-t\right)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{7}{2}-1}(1-t)^{\frac{5}{2}-1} dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$. Сега вече сме наясно, че това е бета функция, използваме връзката и с гама функцията:

$$\frac{1}{2}B\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{1}{2}.\frac{\frac{15}{8}.\sqrt{\pi}.\frac{3}{4}.\sqrt{\pi}}{120} = \frac{3\pi}{512}, \text{ защото}$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right) = \frac{5!!}{2^3}.\sqrt{\pi} = \frac{1.3.5}{8}.\sqrt{\pi} = \frac{15}{8}.\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right) = \frac{3!!}{2^2}.\sqrt{\pi} = \frac{1.3}{4}.\sqrt{\pi} = \frac{3}{4}.\sqrt{\pi} \quad \text{и}$$

$$\Gamma(6) = (6-1)! = 5! = 1.2.3.4.5 = 120.$$

е) Нека разгледаме следния интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+1-p}}dx = \int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx = B(p,1-p)$, който очевдино е бета функция и е дифенцируема спрямо p и $q=1-p$, когато са положителни. Тогава $\frac{\partial}{\partial p}\left[B(p,1-p)\right] = \frac{\partial}{\partial p}\left[\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx\right] = \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{x^{p-1}}{1+x}\right)dx = \int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx = J$

От друга страна $B(p,1-p) = \frac{\Gamma(p).\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$.

Следователно $J = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\pi}{\sin p\pi}\right) = -\frac{\pi}{\sin^2 p\pi}(\sin p\pi)' = -\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}$.

ж) След като запимем интегралът във вида $J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \int_0^1 \frac{dx}{x.\sqrt[n]{\frac{1}{x^n}-1}}$, полагаме

$t = \frac{1}{\frac{1}{x^n}-1}$, откъдето $\frac{1}{x^n}-1=\frac{1}{t}$ и $x=\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\frac{1}{n}}$. Пресмятаме $dx = d\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\frac{1}{n}} =$

$= \frac{1}{n}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\frac{1}{n}-1}.\frac{1}{(t+1)^2}dt = \frac{1}{n}.\frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{(t+1)^{\frac{1}{n}+1}}dt$ и новите ганици при $x=0 \to t=0$, $x=1\to t=+\infty$.Тогава

$J = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\frac{1}{n}}}.t^{\frac{1}{n}}.\frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{(t+1)^{\frac{1}{n}+1}}dt = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{(t+1)^{\frac{1}{n}+1-\frac{1}{n}}}dt = \frac{1}{n}.B\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$, защото

$$B\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\frac{1}{n}\pi}.$$

Задача2.6 Изразете чрез Ойлеровите интеграли следните интеграли и определете областта на сходимост на всеки от тях:

а) $J=\int\limits_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}dx$;

б) $J=\int\limits_1^3 \frac{(x-1)^m(3-x)^n}{(x+2)^{m+n+2}}dx$;

в) $J=\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1}x}{(1+k\cos x)^n}dx, \quad 0<|k|<1$.

Решения:

а) При $n>0$ извършваме субституцията $x=t^{\frac{1}{n}}$ $(t>0)$, $dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$ и границите на интеграла се запазват. Получаваме, че $J=\frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-t}dt=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$.

При $n<0$, подходяжаме по аналогичен начин, полагаме $n=-n_1$ ($n_1>0$) , извършваме субституцията $x=t^{-\frac{1}{n_1}}$ $(t>0)$ и получаваме

$$J=\frac{1}{n_1}\int\limits_0^{+\infty} t^{-\frac{m+1}{n_1}-1}e^{-t}dt=\frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{m+1}{n_1}-1}e^{-t}dt=-\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right).$$

Като обединим двата случая, получаваме, че $J=\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$. Тъй като функцията $\Gamma(p)$ е определена при $p>0$, то окончателно имаме, чедаденият интеграл е сходящ при $\frac{m+1}{n}>0$.

б) Нека запишен интеграла по следния начин

$$J=\int\limits_1^3 \frac{(x-1)^m(3-x)^n}{(x+2)^{m+n+2}}dx=J=\int\limits_1^3\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^m.\left(\frac{3-x}{x+2}\right)^n.\frac{1}{(x+2)^2}dx.$$

Полагаме $\frac{x-1}{x+2}=at$, като числото a избираме така, че $\frac{3-x}{x+2}=b(1-t)$ за някое реално число b. От първото равенство намираме $x=\frac{2at+1}{1-at}$. Като заместим x полученият израз във второто равенство и преобразуваме, получаваме, че $\frac{-5at+2}{3}=b(1-t)$ при всяко t.

След приравняване на коефициентите пред t се оказва, че това е възможно само при $a = \frac{2}{5}$,

$b = \frac{2}{3}$. Следователно

$$x = \frac{4t+5}{5-2t}, \; dx = \frac{30}{(5-2t)^2}dt, \; x+2 = \frac{15}{5-2t}, \; \frac{3-x}{x+2} = \frac{2}{3}(1-t).$$

Тогава след като заместим в преработения интеграл получаваме

$$J = \frac{2^{m+n+1}}{5^{m+1}.3^{n+1}}.\int_0^1 t^m(1-t)^n dt = \frac{2^{m+n+1}}{5^{m+1}.3^{n+1}}.B(m+1, n+1).$$

Следователно съгласно дефиницията за бета функция интегралът е сходящ при $m > -1$ и $n > -1$.

в) Полагаме $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Съответно $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ и границите на интеграла са при $x = 0 \to t = 0$ и $x = \pi \to t = +\infty$. Получаваме $J = \frac{2^n}{(1+k)^n}.\int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(1+\alpha^2 t^2)^n}dt$, $\alpha = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}$.

Налага се да направим още едно полагане за да приведем интеграла до типичната бета функция. Това се прави чрез полагането $\alpha t = \sqrt{z}$ $(z > o)$, очевидно границите на интеграла се запазват, а $dt = \frac{1}{2\alpha\sqrt{z}}dz$. Тогава

$$J = \frac{2^n}{(1+k)^n}.\frac{1}{2\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{z}/\alpha\right)^{n-1}}{(1+z)^n}.\frac{1}{\sqrt{z}}dz = \frac{2^{n-1}}{(1+k)^n}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{n-1}\int_0^{+\infty} \frac{z^{\frac{n}{2}-1}}{(1+z)^{\frac{n}{2}+\frac{n}{2}}}dz = \frac{2^{n-1}}{(1-k)^{\frac{n}{2}}}.\int_0^{+\infty} \frac{z^{\frac{n}{2}-1}}{(1+z)^{\frac{n}{2}+\frac{n}{2}}}dz =$$

$$= \frac{2^{n-1}}{(1-k)^{\frac{n}{2}}}.B\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right).$$

Следователно даденият интеграл е сходящ при $n > 0$.

2.3 Задачи за самоподготовка

1. Изследвайте за сходимост интегралите и ако е възможоно пресменетнете стойностите им:

а) $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^3+x}dx$;

б) $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}dx$;

в) $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x.\sqrt[3]{x^2+1}}dx$;

г) $\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} x e^x dx$;

д) $\int_{1}^{+\infty} \frac{2+x^2}{x^4.e^x}dx$.

1. Като изпозвате свойствата на гама и бета функциите, пресметнете интегралите:

а) $J=\int_{0}^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}dx, \quad n\in\mathbb{N}$;

Упътване: Чрез субситуцията $x=\sqrt{t}$ докажете, че $J=\frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$.

б) $J=\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx,\ n>0$;

Упътване: Направете субституцията $x=t^{\frac{1}{n}}$.

в) $J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} tg^n x dx, \quad |n|<1$;

Упътване: Направете субституцията $\mathrm{tg}x=\sqrt{t}$.

г) $J=\int_{0}^{+\infty} \frac{x\ln x}{1+x}dx$;

Упътване: Положете $x=t^{\frac{1}{3}}$ и изпозвайте задача3.5 е).

2. Изразете чрез Ойлеровите интеграли следните интеграли и определете областта на сходимост на всеки от тях:

а) $J = \int\limits_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^p dx$;

Упътване: Положете $\ln \frac{1}{x} = t$ и покажете, че $J = \Gamma(p+1)$.

б) $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x.\cos^n x dx$;

Упътване: Направете субституцията $\sin x = \sqrt{t}$ и $J = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2} \right)$.

в) $J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}$.

§3 РЕДОВЕ НА ФУРИЕ

3.1 Предварителни бележки

Д3.1 Една функция $f(x)$, определена за всяко $x \in \mathbb{R}$, се нарича *Т-периодична*, когато $f(x+T) = f(x)$, за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Д3.2 Нека функцията е интегруема в интервала $[-\pi, \pi]$, тогава редът

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

се нарича *тригонометричен ред на Фурие* или за краткост *ред на Фурие* за функцията $f(x)$. Реалните числа a_0, a_n и b_n $n = 1, 2, 3...$ се начичат коефициенти на реда и са съответно равни на:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \, , a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \text{ и } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \, , \ n = 1, 2, 3...$$

.

Ако вместо интервала $[-\pi, \pi]$ разгледаме интервала $[-l, l]$, тогава ред на Фурие се нарича редът:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}) \, ,$$

където

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)dx \ a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \, , b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \, .$$

За абсолютно интегруема функция (интегруема по абсолютна стойност), коефииентите на Фурие a_n и b_n клонят към нула при $n \to \infty$.

Теорията на редовете на Фурие е свързана с възможността за представяне на една 2π - периодична функция във вид на тригонометричен ред.

Д3.3 Една функция $f(x)$ се нарича частично непрекъсната в интервала $[-\pi, \pi]$, ако тя е непрекъсната във всяка точка на $[-\pi, \pi]$, освен може би в краен брой точки, в които тя има прекъсване от първи род.

Д3.4 Ако $f(x)$ и $f'(x)$ са частично непрекъснати функции ще казваме, че $f(x)$ е *частично гладка*.

Т3.1*(Теорема на Дирихле)* Нека частично гладката функция $f(x)$ е 2π-периодична за всяко $x \in \mathbb{R}$. Тогава за всяко $x \in \mathbb{R}$ тригонометричния ред на Фурие е скодящ и има за сума величината равна на полусбора от лявата и дясната граници на функцията в тази точка т.е.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

(при това сходимостта е равномерна във всяка отсечка, лежаща вътре в участъка на гладкост на $f(x)$).

3.2 Развитие на функция в ред на Фурие

Предвид теоремата на Дирихле, може да се заключи, че ако $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[-\pi, \pi]$, частично гладка в него и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогава редът на Фурие за $f(x)$ е равномерно сходящ в $[-\pi, \pi]$ и има за сума $f(x)$.

Нека $f(x)$ е непрекъсната, нека е непрекъсната и $f'(x)$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогава редът на Фурие за производната $f'(x)$ се получава от рда на Фурие за функцията $f(x)$ чрез почленно диференциране. Ще отбележим също, че редът на Фурие за абсолютно интегруема в интервала $[-\pi, \pi]$ функция може да се интегрира почленно в този интервал.

Задача 3.1 Нека функцията $f(x)=\begin{cases} -x, \text{за } -\pi \le x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{\pi}, \text{за } 0<x \le \pi \end{cases}$ е продължена периодично върху интервала $(-\infty,+\infty)$. Развийте в ред на Фурие в интервала $f(x)$.

Решение:

Очевидно продължената функция е непрекъсната за всяко x (рис 3.1). Производната и $f'(x)=-1$ за $-\pi<x<0$ и $f'(x)=2x/\pi$ за $0<x<\pi$ е определена и непрекъсната освен в точките $x=\pi k (k=0,\pm1,\pm2,...)$, защото $\lim\limits_{x\to\pi k^-}(-x)=-\pi k \ne \lim\limits_{x\to\pi k^+}(x^2/\pi)=\pi k^2$.

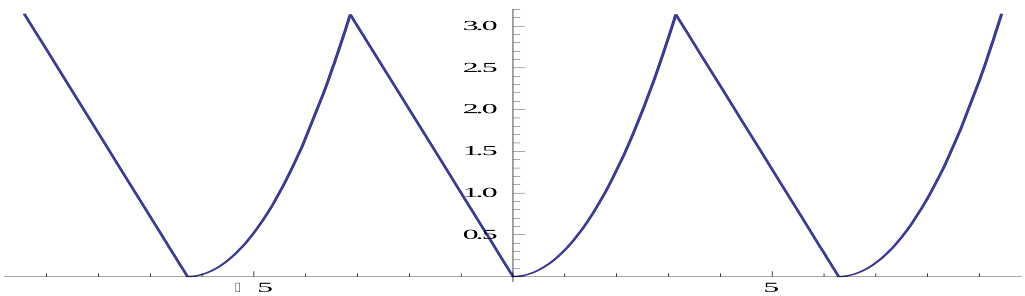

Рис 3.1

Следователно съгласно **Т3.1** редът на Фурие за $f(x)$ е сходящ за всяко x и има за сума периодичното продължение на $f(x)$ т.е. $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$. Остава да пресметнем коефициентите на реда посредством известните ни формули:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}dx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^3}{3\pi}\right)\Bigg|_{0}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2}+\frac{1}{\pi}\frac{\pi^3}{3\pi}=\frac{5}{6}\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-x\cos nx)dx+\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\int_{0}^{-\pi}(-x\cos nx)dx+\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\sin nxdx\right)=$$

Сменяйки границите и считайки, че $x=-t$ в първия интеграл достигаме до следната сума

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} x\cos nxdx+\int_0^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\frac{x^2}{\pi})\cos nxdx=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}(x+\frac{x^2}{\pi})d\sin nx=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[(x+\frac{x^2}{\pi})\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(1+\frac{2x}{\pi})\sin nxdx\right]=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}(1+\frac{2x}{\pi})\sin nxdx=$$

$$\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{\pi}(1+\frac{2x}{\pi})d\cos nx=\frac{1}{n^2\pi}\left[(1+\frac{2x}{\pi})\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}\left[(1+\frac{2\pi}{\pi})\cos n\pi-1-\frac{2}{n\pi}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right]=\frac{1}{n^2\pi}\left[(1+\frac{2\pi}{\pi})\cos n\pi-1\right].$$

Тъй като $\cos n\pi=\begin{cases}1, & n=2k\\ -1, & n=2k+1\end{cases}$, окончателно можем да запишем, че $a_n=\dfrac{3(-1)^n-1}{n^2\pi}$.

По аналогичен начин пресмятаме и останалите коефициенти b_n на реда на Фурие,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nxdx+\int_0^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\sin nxdx\right]=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{x^2}{\pi}-x)\sin nxdx=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}(\frac{x^2}{\pi}-x)d\cos nx=-\frac{1}{n\pi}\left[(\frac{x^2}{\pi}-x)\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(\frac{2x}{\pi}-1)\cos nxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}(\frac{2x}{\pi}-1)\cos nxdx=+\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{\pi}(\frac{2x}{\pi}-1)d\sin nx=$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}\left[(\frac{2x}{\pi}-1)\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right]=\frac{2}{n^3\pi^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n^3\pi^2}\left[(-1)^n-1\right],\text{т.е}$$

$$b_n = \frac{2}{n^3\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] \text{ или } b_n = \begin{cases} 0, & \text{при четно } n \\ -\frac{4}{n^3\pi^2}, & \text{при нечетно } n \end{cases}.$$

Тогава за развитието на получаваме:

$$f(x) = \frac{5}{12}\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx - \frac{4}{\pi^2(2n-1)^3}\sin(2n-1)x\right] \text{за всяко } x \in \mathbb{R}.$$

Задача 3.2 Нека $f(x)$ е 2π - периодична функция определена по следниия начин

$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{при } -\pi \le x < 0 \\ 1, & \text{при } 0 \le x < \pi \end{cases}$. Развийте в тригонометричен ред на Фурие $f(x)$.

Решение: Функцията е частично гладка, при което има прекъсване от първи род само в точките $x = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ защото $\lim\limits_{x \to k\pi^-}(-1) = -1$ и $\lim\limits_{x \to k\pi^+} 1 = 1$. Веднага може да заключим(Т3.1), че в тези точки редът на Фурие има за сума $f(k\pi + 0) + f(k\pi - 0) = 0$. Остава да пресметнем сумата му за всички останали реални числа. Следвайки формулите за коефициентите имаме:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1dx = \frac{1}{\pi}(-x)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}x\Big|_{0}^{\pi} = -\pi + \pi = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\sin nxdx = -\frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx = \frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\big(1 - con(-\pi n)\big) - \frac{1}{\pi n}\big(\cos(-\pi n) - 1\big) = \frac{2}{\pi n}(1 - \cos \pi n) = \frac{2}{\pi n}(1 - (-1)^n), \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Очевидно и тук $b_n = \begin{cases} 0, & \text{при } n \text{ четно} \\ \dfrac{4}{\pi n}, & \text{при } n \text{ нечетно} \end{cases}$, тогава за реда на Фурие намираме

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} \quad \forall\ x \neq k\pi\,, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ако положим $x = \dfrac{\pi}{2}$ ще получим следното интересно равенство

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots$$

На следващатата рисунка е дадена графиката на $f(x)$ заедно с графиката на частичните суми на реда при *n=5* и *n=21*. Вижда се че с увеличаването на броя на членовете осцилациите на реда намаляват и дой се доближава до стойностите на функцията в точките на непрекъснатост. Около точките на прекъсване осцилациите са най-устойчиви, и апроксимирането на функцията е най-лошо отколкото в точките на непрекъснатост. Това явление се нарича *феномен на Гибс*. Той е общо правило и в известен смисъл е цената, която плащаме за развитието в ред на функции, които не са непрекъснати.

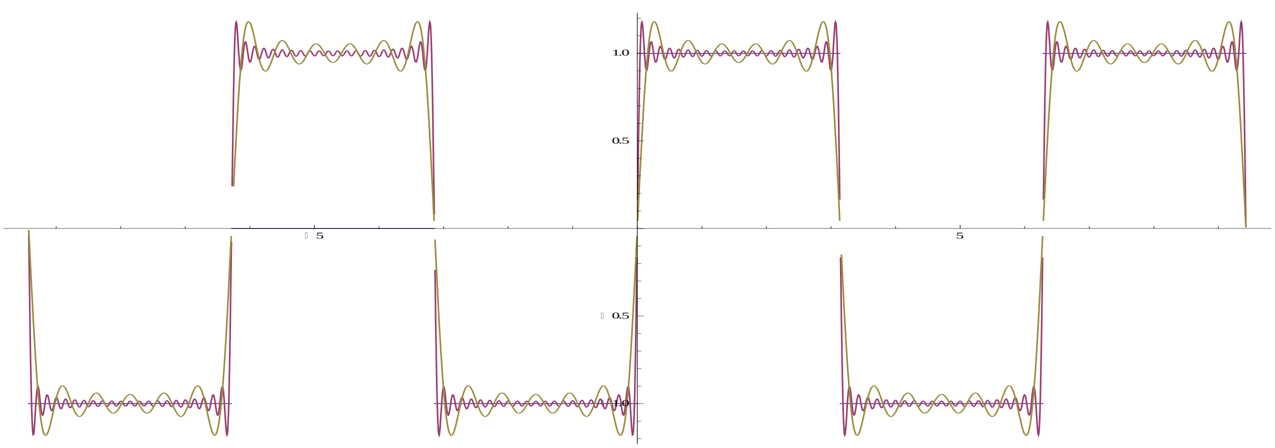

Рис. 3.2

Задача 3.3 Нека $f(x)$ е периодична функция с период *T=6* за, която е дадено $f(x)=\frac{x}{3}-1$ за $x\in(0,6]$. Да се представи $f(x)$ в ред на Фурие.

Решение: Дадената функция е частично гладка с изключение на точките $x=6k$, $k=0,\pm1,\pm2,\pm3...$ Съгласно теорема на Дирихле за всяко $x\in\mathbb{R}$ тригонометричния ред на Фурие е сходящ и има за сума величината равна на полусбора от лявата и дясната граници на функцията в тази точка. За точките в които имаме прекъсване $x=6k$

$$\frac{f(6k+0)+f(6k-0)}{2}=\left[\lim_{x\to6k^+}\left(x/3-1\right)+\lim_{x\to6k^-}\left(x/3-1\right)\right]/2=(-1+1)/2=0.$$

Продължаваме с пресмятанията на реда за всички останали *x*. Тук вместо интервала $[-\pi,\pi]$ имаме $[-3,3]$, предвид и свойство на определения интеграл за периодична функция с период $l:\int_a^b g(x)dx=\int_{a+l}^{b+l}g(x)dx$ пресмятаме коефициентите на Фурие,

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{3}\int_0^6(\frac{x}{3}-1)dx=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{6}-x\right)\Bigg|_0^6=\frac{1}{3}(6-6)=0$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}=\frac{1}{3}\int_0^6(\frac{x}{3}-1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int_0^6\frac{x}{3}\cos\frac{n\pi x}{3}dx-\int_0^6\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right]=\frac{1}{3}\left(I_1-I_2\right).$$

За I_1 внасяме косинуса под диференциала и интегрираме по части:

$$I_1=\int_0^6\frac{x}{3}\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{n\pi}\int_0^6\frac{x}{3}d\sin\frac{n\pi x}{3}=\frac{1}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^6-\int_0^6\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[6\sin(2\pi n)-0\sin0+\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^6\right]=\frac{3}{n^2\pi^2}\left[\cos(2\pi n)-\cos0\right]=0$$

За I_2 получаваме $I_2=\int\limits_0^6 \cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^6=\frac{3}{n\pi}\left[\sin(2\pi n)-\sin 0\right]=0$.

Окончателно $a_n=\frac{1}{3}\left(I_1-I_2\right)=0$. По аналогичен начин пресмятеме и b_n,

$$b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{3}\int\limits_0^6\left(\frac{x}{3}-1\right)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int\limits_0^6\frac{x}{3}\sin\frac{n\pi x}{3}dx-\int\limits_0^6\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right]=\frac{1}{3}\left[G_1-G_2\right].$$

От сега знаем, че вторият интеграл е нула (виж в I_1 по-горе), тогава за G_1 имаме:

$$G_1=\int\limits_0^6\frac{x}{3}\sin\frac{n\pi x}{3}dx=-\frac{1}{n\pi}\int\limits_0^6 xd\cos\frac{n\pi x}{3}=-\frac{1}{n\pi}\left[\left(x\cos\frac{n\pi x}{3}\right)\Big|_0^6-\int\limits_0^6\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right]=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\left[6\cos(2n\pi)-0\cos 0-0\right]=-\frac{1}{n\pi}(6-0)=-\frac{6}{n\pi}.$$

Интеграла от косинус е нула, видяхме го по-горе в пресмятането на I_2. Следователно за b_n имаме $b_n=\frac{1}{3}\left[G_1-G_2\right]=\frac{1}{3}\left[-\frac{6}{n\pi}-0\right]=-\frac{2}{n\pi}$.

Развитието на $f(x)$ в ред на Фурие е:

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{3} \text{ за всяко } x\neq 6k,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Задача3.4 Да се развие в ред на Фурие функцията $f(x)=\begin{cases}1-2x, x\in[-2,-1]\\ 5+2x, x\in[-1,0]\end{cases}$ в интервала $(-\infty,\infty)$.

Решение: Очевидно функцията е дефинирана в интервал неудобен за изчисленията ни, затова полагаме $x = t - 1$ и трансформираме $f(x)$ във функцията $g(x) = \begin{cases} 3 - 2t, t \in [-1,0] \\ 3 + 2t, t \in [0,1] \end{cases}$,

която може да се продължи до периодична, непрекъсната и частично гладка функция върху цялата реална права при това $g(-1) = g(1)$. Тогава редът на Фурие ще е сходящ за всяко x и сумата му ще е $g(x)$, респективно $f(x)$. Периодът на функцията $g(x)$ е равен на дължината на интерва $([-1,1])$ в който първоначално тя е дефинрана и откъдето и $l = 1$.

Вече може да започнем пресмятането на коефициентите на реда. Нека започнем с a_0,

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)dt = \int_{-1}^{o}(3-2t)dt + \int_{0}^{1}(3+2t)dt = -\frac{1}{2}\frac{(3-2t)^2}{2}\bigg|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\frac{(3+2t)^2}{2}\bigg|_{0}^{1} = -\frac{1}{2}.\frac{9-25}{2} + \frac{1}{2}.\frac{25-9}{2} = 4.$$

За a_n, както при примерите по-горе ще внесем косинус под диференциала и след това ще използваме формулата за интегрина по-части:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l} = \int_{-1}^{0}(3-2t)\cos n\pi t dt + \int_{0}^{1}(3+2t)\cos n\pi t dt =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\int_{-1}^{0}(3-2t)d\sin n\pi t + \int_{0}^{1}(3+2t)d\sin n\pi t\right] = \frac{1}{n\pi}\left[I_1 + I_2\right].$$

Предвид обема на формулите ще пресметнем двата интеграла поотделно;

$$I_1 = (3-2t)\sin n\pi t\big|_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0}\sin n\pi t dt = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi t\big|_{-1}^{0} = -\frac{2}{n\pi}(\cos 0 - \cos n\pi) = -\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right),$$

$$I_2 = (3+2t)\sin n\pi t\big|_{0}^{1} + 2\int_{0}^{1}\sin n\pi t dt = \frac{2}{n\pi}\cos n\pi t\big|_{0}^{1} = \frac{2}{n\pi}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right).$$

Окончателно за a_n получаваме $a_n = \dfrac{4}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0, & \text{при } n \text{ четно} \\ \dfrac{-8}{n^2\pi^2}, & \text{при } n \text{ нечетно} \end{cases}$.

По аналогичен начин пресмятаме и b_n :

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt = \int_{-1}^{0}(3-2t)\sin n\pi t dt + \int_{0}^{1}(3+2t)\sin n\pi t dt = G_1 + G_2$$

$$G_1 = -\frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{0}(3-2t)d\cos n\pi t = -\frac{1}{n\pi}\left[(3-2t)\cos n\pi t\Big|_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0}\cos n\pi t dt\right] =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[3\cos n\pi - 5\cos n\pi + \frac{1}{n\pi}\sin n\pi t\Big|_{-1}^{0}\right] = -\frac{1}{n\pi}\left[-2\cos n\pi + \frac{1}{n\pi}\left(\sin 0 + \sin n\pi\right)\right] = \frac{2\cos n\pi}{n\pi},$$

$$G_2 = -\frac{1}{n\pi}\int_{0}^{1}(3+2t)d\cos n\pi t = -\frac{1}{n\pi}\left[(3+2t)\cos n\pi t\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\cos n\pi t dt\right] =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[5\cos n\pi - \cos 3n\pi - \frac{1}{n\pi}\sin n\pi t\Big|_{0}^{1}\right] = -\frac{1}{n\pi}\left[2\cos n\pi - \frac{1}{n\pi}(\sin n\pi - \sin 0)\right] = -\frac{2\cos n\pi}{n\pi}.$$

Следователно $b_n = G_1 + G_2 = \dfrac{2\cos n\pi}{n\pi} - \dfrac{2\cos n\pi}{n\pi} = 0$.

Реда на Фурие за $g(x)$ е следния:

$$g(x) = 4 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}\cos(2k+1)\pi t, \text{ за всяко } t,$$

да не забравим да се върнем към променливото *x*, съответно и към $f(x)$, посредством направеното полагане $t = x+1$, тогава окончателно получаваме

$$g(x) = 4 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}\cos(2k+1)\pi(t+1) =$$

$$= 4 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^2 \pi^2} \cos(2k+1)\pi x \text{, за всяко } x.$$

3.3 Разлагане на четна и нечетна функция в ред на Фурие

Лесно може да се покаже, че:

- Ако една функция $f(x)$ е четна редът на Фурие има вида $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, т.е

  $b_n = 0$ и $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx$, $n = 0,1,2...$

- Ако функцията $f(x)$ е нечетна редът на Фурие има вида $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ т.е.

  $a_n = 0$ и $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx$, $n = 0,1,2...$

При развитие на $f(x)$, $x \in (0,l)$ в ред на Фурие, само по синуси, е необходимо да се продължи $f(x)$ в $(-l,l)$, така че да се получи нечетна функция и развиваме получената функция. По аналогичен начин ако за $f(x), x \in [0,l]$се иска да се представи в сума от косинуси, то продължаваме $f(x)$в $x \in [-l,l]$, така че да се получи четна функция и представяме нея в ред на Фурие.

Задача 3.5 Развийте в тригонометричен ред функцията $f(x) = x$ по косинуси.

Решение: За да получим развитието на функцията x по косинуси (в интервала $[0,\pi]$), ще трябва най-напред да продължим $f(x)$ до четна функция, т.е. $f(x) = |x|$ за $x \in [-\pi,\pi]$. След това можем да продължим $f(x)$до $f_1(x)$ периодично въху цялата реална ос, при това $f(-\pi) = f(\pi) = 1$. Функцията $f_1(x)$ е непрекъсната навсякъде и частично гладка, следователно редът на Фурие за тази функция е сходящ навсякъде и има за сума $f_1(x)$. Кофициентите на реда са следните :

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(\pi^2 - 0) = \pi\ ,\ b_n = 0\ , n = 0,1,2...$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} xd\sin nx = \frac{2}{n\pi}\left[x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nxdx\right] = \frac{2}{n\pi}\left[\pi\sin\pi x - 0 + \frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\left[\cos\pi x - \cos 0\right] = \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right] \text{ т.е. } a_n = \begin{cases} 0, & \text{при } n \text{ четно} \\ \dfrac{-4}{n^2\pi}, & \text{при } n \text{ нечетно} \end{cases}.$$

Тогава за $x \in [0,\pi]$ получаваме равенството $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, интересен резултат би се получил ако положим $x = 0$, а именно:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \quad \text{или} \quad \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + ... + \frac{1}{(2n+1)^2} + ...$$

Задача 3.6 Да се развие в ред на Фурие само по синуси следната функция:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} - x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\pi}{4}, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}.$$

Решение: За да развием функцията по синуси трябва да е додефинираме като нечетна функция т.е $f(-x) = -f(x)$ за всяко $x \in (-\infty,+\infty)$, а геометрично това означава графиката на новата функцията да е централно симетрична . По-долу е визуалиция на $f(x)$ (дадената функция Рис. 3.3) и на допълващата нечетна в интервала $[-\pi,\pi]$ (Рис. 3.4).

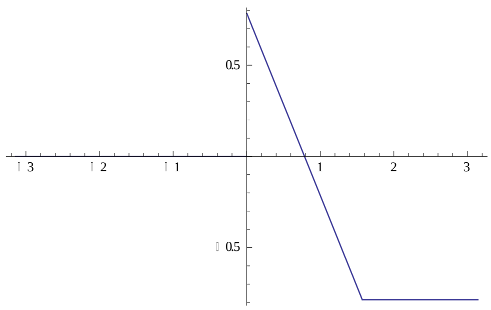

Рис. 3.3

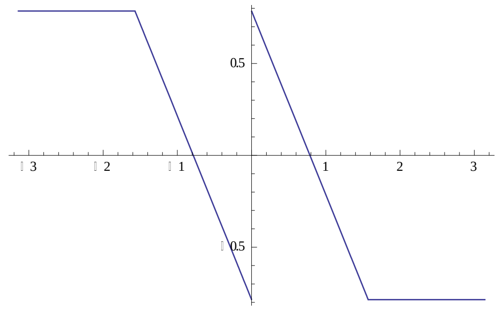

Рис. 3.4

Централно симетричната $F(x)$ очевидно ще се дефинира по следния начин:

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & x\in[-\pi,-\pi/2] \\ -\dfrac{\pi}{4}-x, & x\in[-\pi/2,0] \end{cases}.$$

Сега вече е лесно да дефинираме $f_1(x)$ на която ще търсим развитие в ред на Фурие:

$$f_1(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & x\in[-\pi,-\pi/2] \\ -\dfrac{\pi}{4}-x, & x\in[-\pi/2,0] \\ \dfrac{\pi}{4}-x, & x\in[0,\pi/2] \\ -\dfrac{\pi}{4}, & x\in[\pi/2,\pi] \end{cases}.$$

Трябва да направим развитие по синуси, тогава a_0 и a_n са нули, изчисляваме само b_n. На пръв поглед $f_1(x)$ не ни е необходима за пресмятана на коефициентите, но трябва да я напишем за да сме сигурни, че тя съществува, защото ако не е налице периодично продължение, няма да съществува и ред на Фурие.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx\,\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{4}-x)\sin nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\frac{\pi}{4})\sin nxdx\right]=\frac{2}{\pi}[I_1+I_2]$$

Имаме два интеграла нека започнем с първия, като внесем синуса под диференциала и интегрираме по части.

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{4}-x)\sin nxdx=-\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{4}-x)d\cos nx=-\frac{1}{n}\left[(\frac{\pi}{4}-x)\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nxd(\frac{\pi}{4}-x)\right]=$$

$$=-\frac{1}{n}\left[(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})\cos n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\cos 0+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nxdx\right]=-\frac{1}{n}\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]=$$

$$=-\frac{1}{n}\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}(\sin\frac{\pi}{2}n-\sin 0)\right]=\frac{\pi}{4n}-\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi}{2}n.$$

Пресмятаме и $I_2=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\frac{\pi}{4})\sin nxdx=\frac{\pi}{4n}\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{4n}(\cos\pi n-\cos\frac{\pi}{2}n)=\frac{\pi}{4n}(-1)^n$.

Следователно за b_n получаваме:

$$b_n=\frac{2}{\pi}[I_1+I_2]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{4n}-\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4n}(-1)^n\right]=\frac{1}{2n}-\frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{\pi}{2}n+\frac{1}{2n}(-1)^n.$$

Развитието на функцията в ред на Фурие е следното:

$$f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{2}-\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi}{2}n\right]\sin nx.$$

Задачата е решена, но може да направим някои допълнителни пресмятания. Ако n е четно число $(n=2k)$, тогава $(-1)^{2k}=1$, $\sin\frac{\pi}{2}2k=\sin k\pi=0$ и реда добива вида:

$$g_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi n}.0\right]\sin 2kx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k}.$$

Съответно ако n е нечетно число $n=2k+1$, то $(-1)^{2k+1}=-1$, $\sin\dfrac{\pi}{2}(2k+1)=(-1)^k$ и

$$g_2(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\sin\big((2k+1)x\big).$$

Окончателно може да представим $f(x)$ във вида $f(x)=g_1(x)+g_2(x)$.

Задача 3.7 Да се развие в ред на Фурие в интервала $[-\pi,\pi]$ по косинуси функцията $f(x)=\cos ax$ (тук a, не е цяло число).

Решение: Функцията $f(x)=\cos ax$ е четна, така че $b_n=0$ за $n=1,2,\ldots$ Пресмятаме

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos axdx=\frac{2}{a\pi}\sin ax\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{a\pi}(\sin a\pi-\sin 0)=\frac{\sin a\pi}{a\pi}.$$

Нека $n\neq 0$. Тогава

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos a\pi\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\big[\cos(a+n)x+\cos(a-n)x\big]dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\cos(a+n)xdx+\int_0^{\pi}\cos(a-n)xdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{a+n}\sin(a+n)x+\frac{1}{a-n}\sin(a-n)x\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{a+n}\sin(a+n)\pi+\frac{1}{a-n}\sin(a-n)\pi-\frac{1}{a+n}\sin(a+n)0+\frac{1}{a-n}\sin(a-n)0\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{a+n}\sin(a\pi+n\pi)+\frac{1}{a-n}\sin(a\pi-n\pi)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{a+n}(\sin a\pi\cos n\pi+\sin n\pi\cos a\pi)+\frac{1}{a-n}(\sin a\pi\cos n\pi-\sin n\pi\cos a\pi)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{a+n}\sin a\pi\cos n\pi+\frac{1}{a-n}\sin a\pi\cos n\pi\right)==\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{a+n}(-1)^n\sin a\pi+\frac{1}{a-n}(-1)^n\sin a\pi\right)=$$

$$=\frac{(-1)^n\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right)=\frac{(-1)^n 2a\sin a\pi}{\pi(a^2-n^2)}.$$

От тук за развитието на функцията получаваме следното:

$$f(x) = \frac{\sin a\pi}{2a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2a \sin a\pi}{\pi(a^2 - n^2)} \cos nx \,.$$

След редица преобразувания на полученото равенство, можем да получим развитието на функцията $\sin x$ в безкрайно произведение, а именно

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right) \text{ за всяко } x \in [-\pi, \pi].$$

3.4 Задачи за самоподготовка

1. Да се развие в ред на Фурие функцията $f(x) = \pi^2 - x^2$ в интервала $[-\pi, \pi]$.

2. Да се развие в ред на Фурие по коцинуси за $x \in (0, \pi)$ функцията $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$.

3. Представете в тригонометричен ред на Фурие функцията: $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}, & -\pi \le x < 0 \\ \dfrac{\pi}{4}, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$, в итервала $(-\pi, \pi)$.

4. Представете в тригонометричен ред на Фурие функцията $f(x) = e^{ax}$, в итервала $(-\pi, \pi)$.

5. Развийте в тригонометричен ред следните периодични функции:
   а) $f(x) = |\sin 2x|$;
   б) $f(x) = |\cos 2x|$.

6. Развийте функцията $f(x) = \sin ax$ по синуси в интервала $(-\pi, \pi)$.

7. Намерете сумите на следните тригонометрични редове:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$.

Упътване: Използвайте, че $e^{z}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}$, където z е комплексно число, представено във вида $z=e^{ix}=\cos x+i\sin x$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Проданов И., Хаджииванов Н., Чобанов И., Сборник от задачи по диференциално и интгрално смятане, Наука и изкуство, София 1976.
2. Любенова Е., Недевски П. и др., Ръководство по математически анализ – първа и втора част, УИ „Св. Климент Охридски", София 1994.
3. Витанов А., Димова В., Караджов Г. и др., Методическо руководство за решаване на задачи по висша математика, Техника, София 1968.
4. Фихтенгольц Г., Курс дифференциального и интегрального исчисления, Наука, Москва 1966.
5. Станков Д. Математически анализ за студенти по икономика, Faber, Велико Търново, 2007.
6. Тагамлицки Я., Диференциално и интегрално смятане, Наука и изкуство, София 1954.